数学娱乐问题

J·A·H·亨特 J·S·玛达其著 张远南 张昶译

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学娱乐问题／（加拿大）H.亨特，（加拿大）S.玛达其著；张远南，张昶译．—上海：上海教育出版社，2000
（通俗数学名著译丛）
ISBN 7-5320-5549-3

Ⅰ.数…　Ⅱ.①H…②S…③张…④张…　Ⅲ.数学-通俗读物　Ⅳ.01-49

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第15861号

J.A.H.Hunter Joseph S.Madachy

Mathematical Diversions

Dover Publications,Inc.

通俗数学名著译丛

数 学 娱 乐 问 题

［美］J·A·H·亨特　J·S·玛达其 著

张远南　张　昶 译

上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社　出版发行

（上海永福路 123 号）

（邮政编码：200031）

各地新华书店经销　上海书刊印刷有限公司印刷

开本 850×1156　1/32　印张 6.5　插页 4　字数 151,000

1998 年 4 月第 1 版　2000 年 3 月第 4 次印刷

印数 10221—15220 本

ISBN 7-5320-5549-3/G·5791　　定价:(软精)9.50 元

译丛序言

数学，这门古老而又常新的科学，正阔步迈向 21 世纪.

回顾即将过去的世纪，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位. 数学正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活作出贡献. 同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志. 因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学. 现代社会对数学的这种需要，在未来的世纪中无疑将更加与日俱增.

另一方面，20 世纪数学思想的深刻变革，已将这门科学的核心部分引向高度抽象化的道路. 面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，门外汉往往只好望而却步. 这样，提高数学的可接受度，就成为一种当务之急. 尤其是当世纪转折之际，世界各国都十分重视并大力加强数学的普及工作，国际数学联盟（IMU）还专门将 2000 年定为**“世界数学年”**，其主要宗旨就是“使数学及其对世界的意义被社会所了解，特别是被普通公众所了解”.

一般说来，一个国家数学普及的程度与该国数学发展的水平相应并且是数学水平提高的基础. 随着中国现代数学研究与教育的长足进步，数学普及工作在我国也受到重视. 早在 60 年代、华罗庚、吴文俊等一批数学家亲自动手撰写的数学通俗读

物，激发了一代青少年学习数学的兴趣，影响绵延至今.改革开放以来，我国数学界对传播现代数学又作出了新的努力.但总体来说，我国的数学普及工作与发达国家相比尚有差距.我国数学要在下世纪初率先赶超世界先进水平，数学普及与传播方面的赶超乃是一个重要的环节和迫切的任务.为此，借鉴外国的先进经验是必不可少的.

《通俗数学名著译丛》的编辑出版，正是要通过翻译、引进国外优秀数学科普读物，推动国内的数学普及与传播工作，为我国数学赶超世界先进水平的跨世纪工程贡献力量.丛书的选题计划，是出版社与编委会在对国外数学科普读物广泛调研的基础上讨论确定的.所选著述，基本上都是在国外已广为流传、受到公众好评的佳作.它们在内容上包括了不同的种类，有的深入浅出介绍当代数学的重大成就与应用；有的循循善诱启迪数学思维与发现技巧；有的富于哲理阐释数学与自然或其他科学的联系；……等等，试图为人们提供全新的观察视角，以窥探现代数学的发展概貌，领略数学文化的丰富多采.

丛书的读者对象，力求定位于尽可能广泛的范围.为此丛书中适当纳入了不同层次的作品，以使包括大、中学生；大、中学教师；研究生；一般科技工作者等在内的广大读者都能开卷受益.即使是对于专业数学工作者，本丛书的部分作品也是值得一读的.现代数学是一株分支众多的大树，一个数学家对于他所研究的专业以外的领域，也往往深有隔行如隔山之感，也需要涉猎其他分支的进展，了解数学不同分支的联系.

需要指出的是，由于种种原因，近年来国内科技译著尤其是科普译著的出版并不景气，有关选题逐年减少，品种数量不断下降.在这样的情况下，上海教育出版社以迎接 2000 世界数学年为契机，按照国际版权公约，不惜耗资购买版权，组织翻译出版这套《通俗数学名著译丛》，这无疑是值得称道和支持的举措.参加本丛书翻译的专家学者们，自愿抽出宝贵的时间来进行这类

通常不被算作成果但却能帮助公众了解和欣赏数学成果的有益工作，同样也是值得肯定与提倡的.

像这样集中地翻译、引进数学科普读物，在国内还不多见.我们热切希望广大数学工作者和科普工作者来关心、扶植这项工作，使《通俗数学名著译丛》出版成功.

让我们举手迎接2000世界数学年，让公众了解、喜爱数学，让数学走进千家万户！

《通俗数学名著译丛》编委会

1997年8月

DOVER 版前言

在这个新的Dover版里，我们收编了一些最近的发现，如新的已知最大的素数，等等. 此外，还在不改变原书面貌的前提下，对一些明显的错误作了修订.

作　者

1974年8月

第一版前言

“一些东西是旧的，一些东西是新的！”这句话似乎总结了本书所要尝试的目的. 需要强调的是：一个真正的娱乐数学的爱好者会发现，动手去做要比阅读怎样去做更加有趣得多！

一些材料，在本书正文中已有充分论述，没有必要在引言中再来一一细表.

对于大量的多阶米诺的资料，我们要感激S·W·果隆姆先驱性的工作. 少数一些人有价值的建议，已在书中相关的地方予以致谢. 此外，我们还要特别对以下人员，表达我们的深切谢意，感谢他们为本书提供了多方面的宝贵意见. 他们是：

J·H·安德森	S·格兰特
S·巴尔	G·盖洛特
A·G·布拉德伯里	R·B·麦克唐菲
A·L·布朗	D·默道希
S·恩肖	J·沃尔多夫

作　者

1963年1月

目　录

第1章 友好的数和其他

任何算命先生都会告诉你:数,所有的数,都有它特殊的品性.然而,可能你并不相信命理学,不相信数的个性.但是,像13这样的数又怎么说呢?人们总是凭臆想把它与坏运气及一些忧虑的事联系在一起,似乎有一种令人讨厌的品格,附着于13本身!从数字上看,13还是一个较小的素数(稍后,当我们讨论默森素数时,还将看到有关素数的一些特别有趣的东西).

无论是职业或是业余的赌徒都会这样说:数7患有精神分裂症——正常的时候表现出好运气,不正常的时候则表现出坏运气.数3素以神秘者著称——宗教上的"三圣"一体;耶稣基督悬在十字架上3小时,躺在墓里整3天;毕达哥拉斯(Pythagoras)称3为"完美的数",因为它表达了"开始、中间和末了";古代的人则认为3是神创造的记号,因为世界是由3位神统治着,他们是朱庇特(在天堂)、尼普顿(在海洋)、普路托(在地狱);还有3种命运,3位女神,连掌管文学、艺术和科学的神,也是3×3位;而人的本身,则可以认为是肉体、灵魂和精神三者的结合.类似地,关于7也有一些神秘的说法:例如7是上帝创造宇宙的天数;而7又是极其罪恶的,古希伯来人就认为"7是上帝的名字".上面说的虽然只是两个数字,但对于其他的数字,也同样带有许多宗教的联想.

不知从什么时候开始,奇数被赋予阳性的表征,而偶数被赋予阴性的表征.反过来,又依此与文化相关联.

但是，所有这些关于数的个性的联想都是人为的，是人类自身经验所引发的结果. 然而作为数的本身，却有着其自身固有的特性.

[r] 一些数就其自身而言是乏味的①(自然，算命先生所坚信的应予除外)，只有当事情与其发生关系时，才能予以解析. 例如，数 220 看起来并没有什么特别. 但把它除自身以外的所有整因子都加起来得：

$$1+2+4+5+10+11+20+22$$
$$+44+55+110=284.$$

现在对数 284 也做同样的事：

$$1+2+4+71+142=220.$$

这里我们似乎看到了一些东西！220 与 284 两者之间有着密切的关系. 其中任一个数的因子(均指除自身外，下同)之和，等于另一个数. 具有这样性质的两个数，我们称之为亲和数，意即“友好的”数. 这类数人们至今也知道得不多，大约不到 1200 对. 这中间，伟大的欧拉(Euler)在 1750 年，一个人就发现了 59 对. 亲和数对，除上面讲的一对外还有：1184 与 1210，2620 与 2924，5020 与 5564，17296 与 18416，9363584 与 9437056，等等. 最小的亲和数对 220 与 284 是从古代人那里知道的. 那时人们把它与护符和命理学联系在一起，即：其中一个数的持有者，

---

① 原注：尽管证明没有乏味数的论证众所周知，我们这里仍将介绍如下. 就是：让我们假定有两类数——有趣的数和乏味的数. 而所有的数，要么归于这一类，要么归于那一类. 而在乏味数的类中，有一个最大的数和一个最小的数. 很明显，这就使得它们令人感到兴趣！如果我们把这两个数移到有趣数的一类，那么留下来的乏味数中，又有最大的与最小的，它们同样使人感到兴趣. 最后，我们只剩下一个或两个乏味的数. 而这本身就是使人感到兴趣的理由！综上，根据反证法，命题获证.

以此作为与另一个数持有者之间亲密友谊的保证. 有些人甚至把亲和数看作婚姻中爱情的基础(就是在现代婚姻中,也不乏这类例子!).

在具有固有品性的数中,研究最多的就是素数. 素数是这样的一种整数,除了1和它自身之外,没有别的整数因子. 例如:2, 3, 5, 7, …, 229, …, 5693, …, 199999 等等,直至无穷. 素数颇具挑战性. 越大的素数,越能表现出这种挑战! 谁会留心像2, 3这样小的素数呢? 但对于像10000019这样的数,谁又能断定它绝对没有整数因子呢? 尽管这个数与我们后面将要提到的"大"的素数相比,小得可怜而且无足轻重!

下面一些素数,看起来令人惊异: [2]

1,111,111,111,111,111,111

11,111,111,111,111,111,111,111

909,090,909,090,909,090,909,090,909,091

9,090,909,090,909,090,909,090,909,090,909,090,909,091.

有许多不同的方法,可以用以检验一个给定的数是否素数. 但对于一个非常大的素数,要实施除法,就非得要动用电子计算机不可. 有一种检验素数的方法,其基本要点是:用所有小于给定数平方根的素数去除它. 例如,我们要检验233,那么,我们就要将它除以小于$\sqrt{233}$,即小于15的素数. 这些素数是:2, 3, 5, 7, 11和13. 当我们除以这些数之后,发现每次都有剩余. 于是,233是素数. 用这种方法检验5659,我们就要除以小于$\sqrt{5659}$,即小于75的素数. 这样的素数有21个. 尽管在实施除法中,存在着许多技巧,这些技巧,使我们得以排除其中的一部分. 但所有这些技巧,对于解决像8083457是否素数的问题,都绝非一件易事. 因为这里需要除的,小于$\sqrt{8083457}$的素数有412个之多! 谁又能用这种方法来检验上面给的数是不是一个

素数呢?

自2300年前欧几里得(Euclid)那时起,素数便成为数学的一项重要内容.欧几里得首先证实了素数的无限性,其论证粗略如下:假设不然,有一个最大的素数P.则全体素数的积加1,要么是一个素数,要么不是一个素数(合数).也就是说:

$$(p_1p_2p_3\cdots P)+1=\text{一个素数或一个合数.}$$

显然,左边的数是不能被任何小于P的素数,或P本身整除.事实上,这种除法的结果总是余1.因此这个数要么是素数,要么是一个具有大于P的素因子的合数.两种情况,都表明比P更大的素数的存在.因而,P不是最大的素数,充其量只是已知的最大素数.

各种各样的素数表被编列出来.其中最大的一部,是八卷本直至100330201的素数表,但中间错误甚多,且第二卷丢失.该书的原始手抄本,保存于维也纳.尽管对它的不完全,人们引以为憾,但它仍不失为一份极有价值的文献.这份表列出了超过5761456个的素数,库立克(Kulik)为此花费了自己的大半生![3]

一份近乎完整的表,由莱默(D. N. Lehmer)于1914年出版.这份表包含了直至10006721的全部素数,含1在内共有665000个素数(1通常不被认为是素数).近年来,头6000000个素数的缩影胶片也已出版.它是由RAND公司的贝克(C. L. Baker)和格伦伯格(F. J. Gruenberger)在IBM704计算机上计算出的.这份长长的表,覆盖了直至104395289的素数.

早期中国人的手稿显示,把素数归于男性的品质,而把其余的奇数看成女性.这表明,即使在那样一种古老的日子里,素数也是作为一种特殊的品类被认识的.而今天,现代的数学,依然表现出对素数的青睐!

在上面提到的，增至 6000000 个的素数表中，有不少类型孤立的大素数是已知的，而且它们大多都有历史的渊源——主要是在证实它们素数性的过程中所包含的极其巨大的工作.

有一群素数称为罗宾逊(Robinson)数，它由以下公式给出：$R(k,n)=2^n\cdot k+1$，该公式对某些 k 和 n 的值产生素数. 例如，$k=5$，$n=1947$，得到一个由 586 个数字组成的素数. 这是目前所知道的最大的罗宾逊素数，然而这并不意味着它就是已知的最大素数.

另一个公式是由费尔马(Fermat)设计的，它也给出了一些素数. 费尔马坚信，对于所有的 n 值，$2^{2^n}+1$ 总能产生素数. 然而他大错而特错！只有五个素数被发现是遵从于这个公式的，它们是：3，5，17，257 和 65537，分别对应于 $n=0$，1，2，3 和 4. 对于紧接着的下一个 n 的值 $n=5$，公式产生数 4294967297，它有两个素因子 641 和 6700417. 从而开创了费尔马数为合数的先例. 此后再也没有这类的素数被发现. 一个被试验的最大的费尔马数是 $2^{2^{1945}}+1$，它包含有大约 $10^{10^{584}}$ 个数字！这个数完全的因子分解目前人们还不知道，只知道它有一个长达 586 个数字的因子，它就是罗宾逊素数 $R(5,1947)$. 这个用以试验的最大的费尔马数 F_{1945} 的非素数性，一方面使人们普遍怀疑，在 F_5 之后的费尔马数中，是否还能找到其他的素数？另一方面又进一步引发了人们的兴趣，并因此吸引了为数众多的，热心的数论专家.

[4]

费尔马数与某些几何作图有着密切联系. 它就是：对于奇数 n，如何作一个正 n 边形的问题. 虽然作正三角形和正五边形没有什么困难，但却没有人能够只用圆规和直尺作出正七边形或正 11 边形. 人们已经知道正 17 边形的一种作法，它是由高斯(C. F. Gauss)于 1798 年他 19 岁的时候发现的. 同时，他还作出了一个令人吃惊的结论：即当正多边形的边数 n 是费尔马素数

时，才可能用圆规和直尺作出①. 换句话说，一个有着素数边的正多边形，只有当边数为 3，5，17，257，65537 时，才可能用欧几里得方法(即只用圆规和直尺)作出.

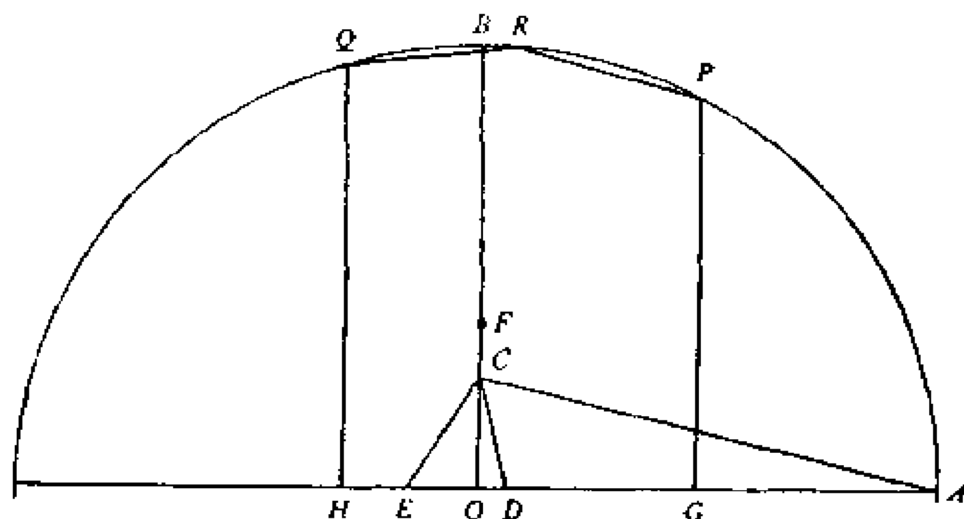


图 1-1

等边三角形和正五边形很容易画出. 正 17 边形也能像图 1-1 那样构造出来②：

作一个以 O 为中心的半圆，并画一条与半径 OA 垂直的半径 OB. 由 A 画 AC，这里 $OC=\frac{1}{4}OB$. 作 $\angle OCD=\frac{1}{4}\angle OCA$，且 $\angle ECD=45°$. 以 EA 为直径画一个半圆，令交 OB 于 F. 以 D 为中心，DF 为半径画另一个半圆，交 OA 于 H 和 G 点. 过 G 和 H 作 OA 的垂线，交大的半圆于 P，Q 点. 则 $\overset{\frown}{PQ}$ 等于圆周的 [5] $\frac{2}{17}$. 令 R 点平分 $\overset{\frown}{PQ}$，则 PR 或 RQ 便是正 17 边形的一边.

---

① 译者注：这一说法不准确. 正确的说法应该是：仅用圆规和直尺把圆周 n 等分，当且仅当 n 是如下形状的整数时才可能：(i) $n=2^m$；(ii) n 是费尔马素数；(iii) $n=2^m p_1 p_2 \cdots p_k$，其中 p_i 是费尔马素数且各不相同.

② 原注：这一方法改编自柯克塞特(H. S. M. Coxeter)的《几何引论》一书，John Wiley & Sons, Inc.，1961 年版，第 27 页.

正257边形和正65537边形的作法人们都已知道，但由于篇幅太长而无法在此详述. 要提到的是：正65537边形的作法，花费了哈默斯(O. Hermes)十年的时光，他的手稿装满了一个大箱子，该箱现仍保存于哥庭根大学. 数学家们总能找到一些个别的，隐藏很深的方法——虽然这种不懈的努力是否有益，有时是值得怀疑的.

现在回到素数上来. 让我们查验一些不同的公式，这些公式是为了产生有限的素数序列而设计的. 最著名的是欧拉多项式 x^2-x+41，它对于 $x=1, 2, 3, \cdots, 40$，给出了40个不同的素数. 最简单的是 $2x^2+29$，它是由勒让德(Legendre)于1798年发现的. 对于 $x=0, 1, 2, \cdots, 28$，它能产生29个素数. 没有一个多项式能够专门给出素数，但却有一个由台尔曼(M. H. Tallman)设计的公式，只要使用得当，可以专门产生素数：

$$N=\frac{P_n}{a_i a_k \cdots a_n} \pm a_i a_k \cdots a_n,$$

这里(1)P_n 是头 n 个素数的乘积，而 $a_i, a_k, \cdots, a_n$ 则是头 n 个素数中，任意一些不同的(或全部)素数；(2)N 要小于第 $n+1$ 个素数的平方. 由此而得的每一个这样的 N 必为素数[①].

一个例子便能弄清楚该公式的使用：

$$\begin{aligned} N &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23}{2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17} \\ &\quad - 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \\ &= 709 \end{aligned}$$

是一个素数，因为 $709 < 29^2$.

关于没有一个多项式能够专门产生素数的证明，对一般的

① 原注：台尔曼公式的证明，发表于《娱乐数学杂志》No. 4，1961年8月，第64页.

读者来说，并不常见.

事实上，如果一个有理代数式所表示的仅仅是素数的话，那么我们能够把它写为以下的式子：

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \cdots.$$

又若当 $x = m$ 时，该公式得到素数 P，则我们有：

[6]

$$P = a + bm + cm^2 + dm^3 + \cdots.$$

又设 $x = m + nP$，我们将得到另一个素数 Q，其值为：

$$Q = a + b(m + nP) + c(m + nP)^2 + d(m + nP)^3 + \cdots.$$

现在，由于 $b(m + nP) = bm +$（含 P 的项），

$c(m + nP)^2 = cm^2 +$（含 P 的项），

$d(m + nP)^3 = dm^3 +$（含 P 的项），

……

于是，$Q = a + bm + cm^2 + dm^3 + \cdots +$（含 P 的项）

$= P +$（含 P 的项）.

表达式（含 P 的项）必须是 P 的倍数，因此，Q 必须是 P 的倍数，从而它不可能是素数. 这就表明一个有理代数式不能仅仅表示素数.

有一些素数是紧挨在一起的. 例如 3 和 5，11 和 13，19469 和 19471，等等. 只有不多的多项式或公式能够产生这样的素数偶. 以下一个是由伽西（A. T. Gazsi）发现的：

$$N = 12150 - 1710A + 60A^2,$$

这里 A 依次取值 1, 2, 3, …, 20 时，$N + 1$ 和 $N - 1$ 是一对紧挨在一起的素数偶. 这里共有 18 对正的素数偶，及一对负的素数偶（-29 和 -31）.

在素数领域，依然存在着许多未能解答的问题和未能证明

的猜想.

伯特伦德(Bertrand)原理是这样陈述的：对于任何大于1的整数 N，在 N 与 $2N$ 之间，至少存在一个素数. 这是可以证明的，但没有一个公式能够指出在这一间隔中素数的准确数量. 还有一个证明，说法非常粗糙，即在 N 与 $2N$ 之间的素数，跟0与 N 之间的素数几乎一样多！在任一特定的场合，素数的准确数量只能从实际试验中去找：例如，在12与24之间有四个素数，而0到12之间却有五个素数. 应用伯特伦德原理我们知道，至少有三个素数恰好含有100个数字——而眼前已知的就有三个：

$$35 \cdot 2^{327} + 1,\ 63 \cdot 2^{326} + 1,\ 81 \cdot 2^{324} + 1.$$ ① [7]

我们还已知许多素数的等差数列：例如，11，17，23，29，它们有公差6. 一个长达10项的数列始于199，公差为210. 已知最长的素数等差数列含有16项，它始于2236133941，公差为223092870，这是路特(S. C. Root)于1969年发现的. 数学家们觉得，应该有比这更长的素数等差数列的存在，但寻找它们的方法，除了反复试验，或在素数表中查找之外，别无更好的道路. 一个至今尚未解决的问题是：是否存在一个任定长度的素数等差数列？例如，是否有一个50项的素数等差数列？

哥德巴赫(Goldbach)定理的陈述是：每一个偶数，都是不多于两个素数的和. 实际的尝试，则从未产生过相反的结果. 与此最为密切的一个证明，是维诺格拉多夫(Vinogradoff)作出的. 他证明了存在一个整数 N，对任意的整数 $n > N$，如果 n 是奇数，则可表示为不多于三个的素数的和；如果 n 是偶数，则可表

---

① 原注：对小于 x 的素数的数量，我们有近似的契比雪夫(Tchebycheff)公式 $\int_2^x (\log x)^{-1} dx$. 利用它我们发现：在 10^{99} 与 10^{100} 之间非常粗略地有 3.9×10^{97} 个素数.

示为不多于四个的素数的和. 只是无论在哪一种情况下，我们都不知道 N 的范围. [1]

我们给出了欧几里得素数无限性的证明，但紧挨着的素数偶是否无限的问题却依然留着. 似乎回答是肯定的，但目前仍是猜想！

现在我们论及一类最为著名的素数，那就是后来以默森(F. M. Mersenne)名字命名的素数. 默森在 1644 年发现了一些新的完全数(稍后将论及更多完全数的内容). 在该项工作中，他陈述了形如 2^p-1 的数，并认为：当 $p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127$ 和 257 时是素数. 但他算错了五个：$p=67$ 和 257 不能产生素数；而能够产生素数的 $p=61$，89 和 107 却被漏过. 为了对他的努力和成就表示敬意，于是便把他的名字，加在形如 2^p-1 的素数上，记为 M_p. 自默森宣称以来，另一些 M_p 相继被找到. 至今为止，已知的全部 p 值开列如下：$p=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937$[2]. 这最后的值给出了一个素数 $2^{19937}-1$，具有 6002 位数字. 如若 [8] 用前面提到的方法，用小于 $\sqrt{2^{19937}-1}$ 的所有素数艰难地去

---

① 译者注：这里所说的哥德巴赫定理，应准确地说为哥德巴赫猜想. 它曾被誉为数学"皇冠上的明珠". 在征服它的道路上中国数学家作出了巨大的贡献.

早在 1938 年，我国著名数学家华罗庚，就因证明了"几乎所有偶数都可以表示为一个素数和另一个素数的和"而彪炳史册. 此后，我国数学家王元、潘承洞等又取得了令世人瞩目的进展. 1966 年 5 月，年轻的中国数学家陈景润证明了"任何一个大偶数都可以表示为一个素数与另两个素数乘积的和"，通称"1＋2"定理. 陈景润的成果被誉为"推动了群山"！他的结论，目前仍是人类智慧向这一世界难题挑战的最辉煌的成果！

② 译者注：这是 1973 年以前的数字. 以后的进展是：1979 年 M_{44497}；1983 年 M_{86243}；1985 年 M_{216091}；1992 年 M_{756839}；1996 年 9 月 $M_{1257787}$；1996 年 11 月 $M_{1398269}$；1998 年 1 月 $M_{3021377}$，这是一个共有 909526 位数字的数.

除，那么即便使用电子计算机，也是很难检验的.

有一种专门用于检验默森数素数性的方法，是卢卡斯(Lucas)于1876年设计的.考虑数列4，14，194，37634，…，其每一项都比前一项的平方小2(即$S_n = S_{n-1}^2 - 2$).如果该数列的第$p-1$项，除以2^p-1而没有剩余，那么M_p是素数.当你看到该数列的第五项是1416317954时，你便不难想象它的第19937项该有多大！但数学家们是不会不理睬一种合宜的检验方法的.虽然从表面上看它要比问题本身更为麻烦，但人们终于想出了一种克服的办法：即当卢卡斯数列出现大于要检验的数M_p时，即用它除以M_p并得出余数，然后用余数替代该项继续下去(如果余数存在).例如，设想我们要检验$2^7-1=127$是否素数，用卢卡斯数列：

第一项是4；

第二项是$4^2-2=14$；

第三项是$14^2-2=194$.

因为194大于127，我们便将它除以127，得到一个余数67.接着我们继续：

第四项是$67^2-2=4487$，除以127得余数42；

第五项是$42^2-2=1762$，除以127得余数111；

第六项是$111^2-2=12321$，除以127没有余数.

因此127是素数.

即使用卢卡斯数列，假如没有电子计算机的辅助，也没有人能够对付得了大的默森数.已知最大的默森素数M_{19937}竟有6002位数字——这无疑是富有挑战性的数！

更令人惊奇的在于，每一个默森素数都对应于一个完全数.至今，我们也还不知道有哪一个完全数，不对应于默森素数！

跟只有1和自身为因子的素数形成对照，完全数是这样的

数，它所有小于自身的因子的和等于该数本身. 这里，因子1含于内，数自身则排于外. 例如：

$$6 = 1 + 2 + 3,$$

[9]

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

于是6和28是两个完全数. 其余的完全数有496，8128和33550336等. 目前已知的完全数共有24个，且全是偶数[①]. 完全数的头四个，早在二千年前就已知道，但第五个却迟至公元1460年才由一个不知姓名的人记载下来. 没有人发现一个奇完全数，以致于人们普遍怀疑它的存在. 公元1750年，欧拉证明：所有偶完全数，都具有已知的欧几里得形式，也就是 $2^{p-1}(2^p - 1)$ 形式，这里 p 及 $2^p - 1$ 是素数（$2^p - 1$ 是我们的老朋友默森素数）. 对于第10页所说的默森素数，都对应着一个由上述公式给出的完全数. 第24个完全数有12003位数字！

人们可能感到奇怪，为什么数学家要在素数和完全数上浪费他们的时间. 其实，正是这种研究，导致了数论方面的巨大进步. 在数论中，悬而未决的问题之一，就是默森素数是否无限？以及完全数是否无限？关于奇完全数的存在性，目前我们只知道，如果它存在的话，必有 $12m + 1$ 或 $36m + 9$ 的形式，这里 m 是素数. 奥莱(O. Ore)写道："卡洛德(H. J. Kanold)表明，没有比 1.4×10^{14} 要小的奇完全数. 我的一位学生马斯卡德(J. B. Muskat)，使我拓宽了眼界，他把上述的低限提高到 10^{18}."

即使证明了默森素数不是无限的，也不能解决完全数是否无限的问题，后者只有在奇完全数解决之后才能解决. 或许有这

---

① 原注：有一类叫倍完全数，它小于自身的因子和是该数的倍数. 如120的因子(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60)的和等于240.（默森于1631年首先指出这种倍完全数的存在.）还有其他更大范畴的数，如3，4，7倍完全数，即其因子和等于该数自身的3倍，4倍或7倍，等等.

么一天，有人发现了第一个奇完全数，或者做出了不存在的证明. 那么，这一天，我们也就在默森素数方面向前迈出了一步. 另一方面，朝着无限这个目标，人们以不懈的热情，探求着一个又一个新的默森素数. 而正是这种相辅相成的结果，创造了数论及一般性数学的多方成就.

人们还知道许多有关完全数的有趣事实： [10]

所有已知的完全数，除 6 以外，其数字根均为 1. 也就是说，它们数字反复相加的最终结果等于 1.

例如，496：$4 + 9 + 6 = 19$，$1 + 9 = 10$，$1 + 0 = 1$.

每一个已知的完全数，除 6 以外，都是从 1 开始的连续奇数的立方和：

$$28 = 1^3 + 3^3,$$

$$496 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3,$$

$$8128 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + 13^3 + 15^3,$$

由此可不断继续下去，这里连续奇数立方的个数等于 $\sqrt{2^{p-1}}$.

完全数还是从 2^{p-1} 到 2^{2p-2}，2 的相继方次的和：

$$6 = 2^1 + 2^2,$$

$$28 = 2^2 + 2^3 + 2^4,$$

$$496 = 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8.$$

完全数还有着许多其他的特殊性质，这里提到的只是其中那些历经漫漫岁月而人们兴趣依旧不衰的内容，这也正是我们讲述它的最充分的理由. 而且，仅仅巡视了为数不多的一些数，我们就看到从中能构筑起如此丰富的内涵，那么，之所以围绕着数会产生一些神秘的迷信说法，也就变得不足为奇. 或许终究算命先生是对的——数有它的个性！ [11]

第2章 从悖论到并行节带

棋盘格的悖论是众所周知的，而由它所引出的结论，不仅有趣，而且十分令人惊异.

这里的悖论，有着大家熟悉的形式. 用一个8单位见方的棋盘作为框格，但所有的方格都不上色. 当我们像图2-1那样把它分切为四块，而后按图2-2所示拼组成5×13的矩形的样子，这时我们似乎多出了一个单位方格. 然而，事实是：后一个矩形的长“对角线”并非是一条真实的直线，而有一方细长而狭窄的平行四边形状的空隙，其面积正好为一个平方单位.

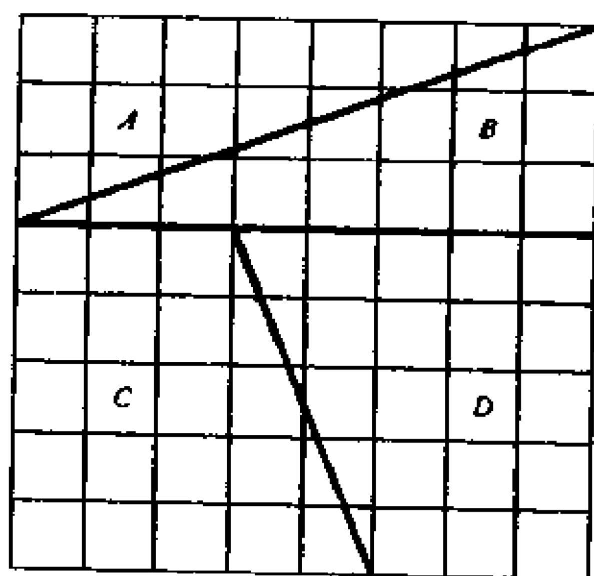


图 2-1

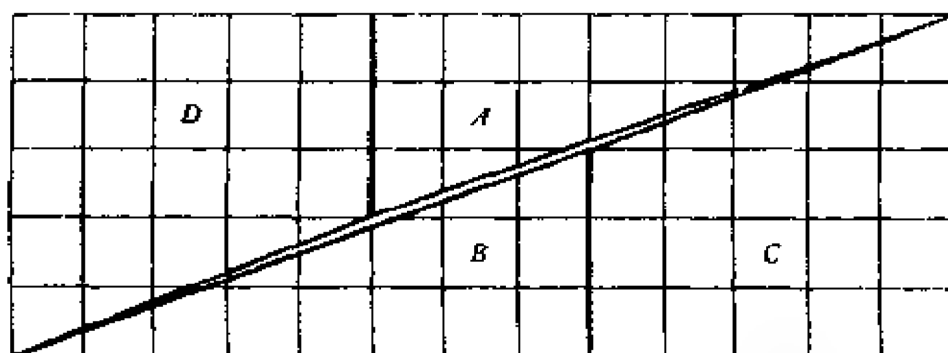


图 2-2

[12]

下面，我们对只有5个单位见方的棋盘格的同样悖论，作一个粗略的说明(图 2-3).

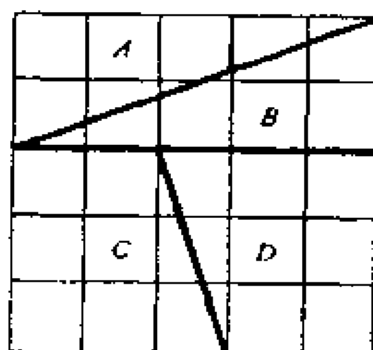


图 2-3

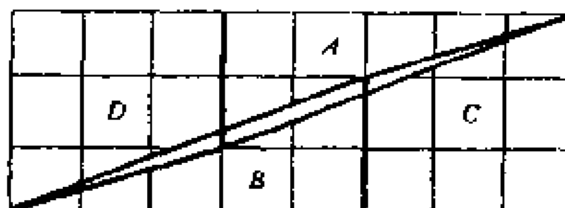


图 2-4

在图 2-4 的 3×8 样式的矩形中，我们似乎丢失了一个平方单位. 然而，事实上在沿着该矩形对角连线的部分，有着一些重叠. 而这一重叠的部分，正是计算上失去的那个平方单位.

在一种情况下，我们表面上获得了一个单位；而在另一种情况下，我们表面上丢失了一个单位. 如果我们注意到，在这两种情况中(图 2-1 至图 2-4)剖割与拼组步骤之间的相似性，也注意到两种情况下数的拆解：

$$2 + 3 = 5,\ 3(3 + 5) = 24 = 5^2 - 1;$$

$$3+5=8,\ 5(5+8)=65=8^2+1,$$

那么，当你试图表示边长大于 8 单位的正方形棋盘的类似悖论时，你将发现：下一个较大的正方形，必须包含 169 个方格单位（即 13×13）；而再下一个，则包含 441 个方格单位（即 21×21）. 至于悖论的构造，则并没有包含新的东西. 对于上述情况，我们同样有数的拆解：

$$5+8=13,\ 8(8+13)=168=13^2-1;$$

$$8+13=21,\ 13(13+21)=442=21^2+1.$$

类似地，你能想得到，对这类悖论来说，最为必要的条件是：所取用正方形的边长的单位数，应该是下面数中的一个：

5，8，13，21，34，55，等等.

而这些则是以下著名的斐波那契（Fibonacci）数列中依次的一些数：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，等等.

上列数中，第二个数后的每一个，都是它前两个数的和. 用数学式表达则为：

$$f_1=f_2=1,\ f_n=f_{n-1}+f_{n-2}.\ (n>2) \tag{13}$$

该数列以比萨的列奥那多（Leonardo），绰号斐波那契的名字命名. 据故事称，公元 1202 年，他在解决一项有关兔子饲养的实际问题时，得到了一系列相继的数字. 据说，他似乎注意到了这些有序数之间的递推关系，但没有明确记录下来. 事实上，第一次在书面上提到这种关系的，是四百年以后的事. 而第一次以悖论面目出现的，则是在又两百多年后的 1868 年，在雷普芝格出版的一份数学杂志上.

这类悖论有赖于斐波那契数列的以下性质：

$$f_{n-2}f_n = f_{n-1}^2 - (-1)^n.$$

这里 f_{n-2}, f_{n-1}, f_n 是已述数列依次的三个数.

我们已经看到了上述恒等式在 $n = 6, 7, 8$ 和 9 等特殊情况下的应用. 在附录中,我们还将对它一般情况下的正确性 ($n > 2$) 给予证明.

有一种与斐波那契数列的关系要远比悖论密切得多的东西. 我们来看一看该数列的头几对相继之数的比,将它算至小数后 4 位,并开列如下:

$$\frac{1}{1} = 1.0000 \qquad \frac{2}{1} = 2.0000$$

$$\frac{3}{2} = 1.5000 \qquad \frac{5}{3} = 1.6667$$

$$\frac{8}{5} = 1.6000 \qquad \frac{13}{8} = 1.6250$$

$$\frac{21}{13} = 1.6154 \qquad \frac{34}{21} = 1.6190$$

$$\frac{55}{34} = 1.6176 \qquad \frac{89}{55} = 1.6182$$

$$\frac{144}{89} = 1.6180 \qquad \frac{253}{144} = 1.6181$$

如果我们的工作遍及整个数列,那么这一比值将明显地趋于一个极限值,该值位于 1.6180 与 1.6181 之间. 它还能准确地以 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ 表示出来,其小数点后五位的值即 1.61803. 1.618…这个数是如此地有趣和重要,以致于早在斐波那契之前一千六百年的古希腊人,给了它一个专门的名字. 而且几乎可以确信,在更早的年代,古埃及人就已经把这个数的魔术般的性质,溶入他们伟大的金字塔的构建之中. 至今仍保存于大不列颠博物馆内的,在古希腊文化兴起前数百年就已写成的阿默斯

[14. (Ahmes)纸草,就包含有大吉夫金字塔(约建于公元前3070年)建筑的详细计算.而它还有可能取自某些更早的作品.在阿默斯纸草中,把用于金字塔这一伟大建筑中的比例,归属为一种"神圣的比".近代测量也证实,金字塔本身的斜棱,与基底中心到底边缘距离的比,几乎准确地显示为1.618!而这个比,正是古希腊人称之为的黄金分割.

我们通过考虑斐波那契数列以达于黄金分割.然而,当我们通过更直接的方式获得这一数值的时候,它的更加重要的性质,也就变得清楚明白了!

在图2-5中,我们给出了一条长为$x+y$的线段,并把它分为x,y两个部分,这两部分的长度满足:整体与大部(令为x)的比,等于大部与小部(令为y)的比.

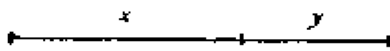


图 2-5

即
$$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}.$$

则 $x^2-xy-y^2=0$,由此 $\frac{x}{y}=\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$.

于是我们找到了x与y的比,亦即大部与小部的比,它就是黄金分割.

下面,我们指出两个有关黄金分割的有趣事实,虽说它并非十分重要.

首先,它是仅有的这样一个数,减去1后变为自身的倒数!即,

$$\frac{(1+\sqrt{5})}{2}-1=\frac{2}{(1+\sqrt{5})}.$$

其次,用三角及众所周知的数学常数e和$i(=\sqrt{-1})$,可以把黄金分割表示为:

$$2\cos\left(\frac{\log_e(i^2)}{5i}\right)^{①}.$$

现在我们依旧去探求那些导出黄金分割的途径.此番我们考虑的是与古代宗教仪式有关联的五边形.在一个正五边形 $ABCDE$ 中(图 2-6),边长为 p 单位,线段 AC 与 BE 交于 F 点,令 $CF = x$, $AF = y$. [15]

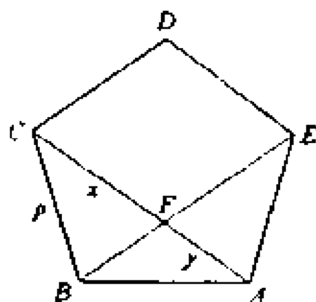


图 2-6

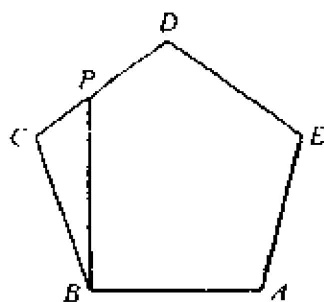


图 2-7

由于三角形 ABC 为等腰三角形,$\angle A = 108°$,从而 $\angle BAC = \angle BCA = 36°$.

同理 $BF = AF$,从而 $\angle ABF = \angle BAF = 36°$.

由此,

$\angle CBF = 108° - 36° = 72°$,且 $\angle CFB = 180° - 108° = 72°$.

由于 $CF = CB$,于是 $x = p$.

但, $x + y = 2p\cos 36°$, 且 $y = \dfrac{p}{2\cos 36°}$.

于是 $$x = \frac{p(4\cos^2 36° - 1)}{2\cos 36°}.$$

由此 $4\cos^2 36° - 1 = 2\cos 36°$,即 $4\cos^2 36° - 2\cos 36° - 1 = 0$,具有正解:

---

① 译者注:应用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$,知 $(i^2) = -1 = e^{i\pi}$,从而 $2\cos\left(\frac{\log_e(i^2)}{5i}\right) = 2\cos\frac{\pi}{5} = 2\cos 36°$. 在下一页我们将看到,该值等于 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$\cos 36° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

则 $x+y=\frac{1}{2}p(1+\sqrt{5}),\ x=p,\ y=\frac{2p}{(1+\sqrt{5})}.$

于是 $$\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

又是黄金分割！

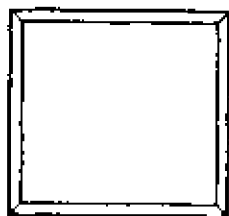
顺便说及，在上述正五边形中，我们还能验证许多黄金分割的例子. 例如，从 $x+y$ 即 AC 的表达式知，AC 与 AB 的比，也显示为 $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$，等等. 在正五边形中，诸如此类的比的出现，真可谓是不胜枚举. 限于篇幅，下面我们介绍最后一个.

图 2-7 所示的是同一个正五边形 $ABCDE$. BP 垂直于 AB 交 CD 于 P 点，则 DP 与 CP 的比，也为黄金分割.

[16]

黄金分割的出现，竟是如此之多！现在我们完全可以理解，古希腊人为什么如此注重和偏爱这个比.

图 2-8 有意展示了两个比例十分不同的画框. 作为装镶图画的理想形状，你本人有何反应呢？你不觉得其中一个"过于正方"，而另一个又"过于狭窄"吗？的确如此！那么，第三个画框你又是什么感觉呢？它是一种可予接受的比例吗？



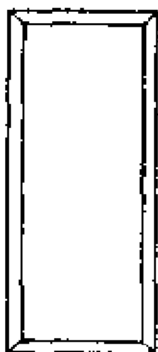


图 2-8

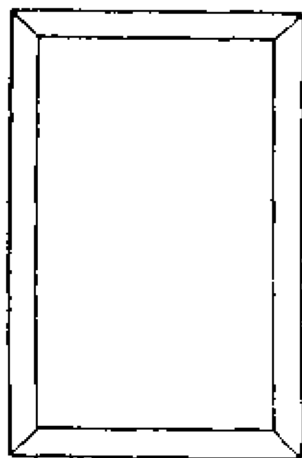


图 2-9

诚如上述,如若你得悉这第二个画框(图 2-9)的尺寸,正是遵从于黄金分割比时,大约你也不会过于惊讶了.事实上,一种长与宽的比接近 1.618 的图形,看上去会使人感到满意和舒适.

作为一种类型的应用,黄金分割一直被古希腊乃至于历代伟大的建筑家、艺术家和雕塑家们所推崇.在那堪称西方艺术之父的,经历了时间长河的风蚀而残留的几乎每一座古希腊建筑,都可以看到举不胜举的黄金分割比.这一比例充斥于结构物的外观,拱道,门,以及其他关键的部位.在稍近的年代,这一比例溶入了达·芬奇(Leonardo da Vinci)、伍任(Christopher Wren)及阿德姆(Adam)兄弟等人的伟大工作.时至今日,它依然呈现于众多的最优秀的时代建筑、艺术、设计等等之中——从摩天大楼直至女性的裙子!是的,即使那些华美而时髦的裙子,也同样偏爱于这一美的旋律!

[17]

下面我们描画了两种风格稍异的四层女式接裙(图 2-10).你觉得哪一种更为可取呢?当然,你会选右边逐层加深的那种.在那个设计中,每一层与其上一层深度的比都恰为黄金分割.

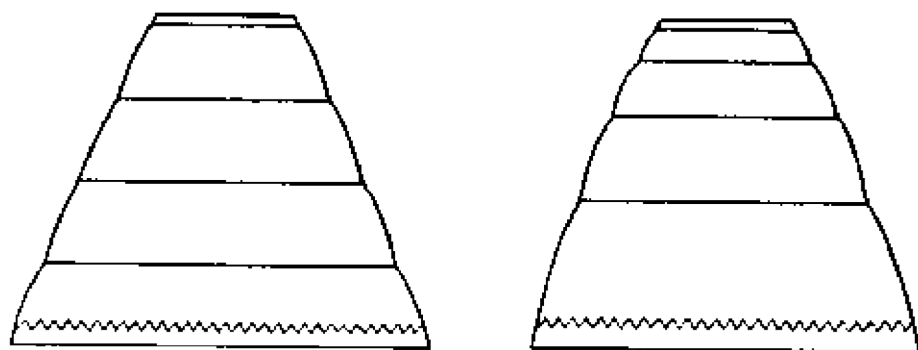


图 2-10

黄金分割我们讲得也够多了.下面我们转到斐波那契和他那多产的兔子上来.其说法自然是臆造的.然而尽管它有些牵强附会,但查证其依据却毫无必要.

假定每对兔子在两个月大时开始繁殖,此后每一个月恰好生产一对小兔,又假设所有的兔子都不会死!

现在我们从一对兔子开始. 在第二个月里兔子数量仍是一对;而第三个月则有两对;第四个月有三对;第五个月有五对;第六个月有八对;如此等等. 从第一个月开始,每一个月兔子对的数量,均由斐波那契数列相应的项给出.

求斐波那契数列某个项的值,比如说第 30 项,即第 30 个月时兔子对的数量,那将是一项乏味的琐事. 而用下面的公式加以计算,似乎更为繁冗. 不过,后者若能配合对数,将会达到一个极好的近似值.

该数列第 n 项的值为:

[18]

$$\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}.$$

例如,第 50 项准确值为 12586269025.

实际上,倘若 n 很大,下式给出的将是数列第 n 项相当准确的近似值:

$$\frac{1.618^n}{2.236}.$$

(请注意这里 1.618 的出现)

用这个简单的公式及四位对数表,我们可获得该数列第 50 项的一个相当精妙的近似值为12600000000.

完全撇开与黄金分割的联系不谈,光是斐波那契数列自身也就够有趣的了. 我们能在它的项与项之间找到许多意想不到的关系,而这些正是我们在数论中所要研究的众多定理的题材,其中一些颇为简易,另一些却甚为复杂.

这里我们提几个斐波那契数列中较为明显的关系式. 其他许多类同的关系,我们可以在相继项的研究中发现它. 而每一次这样的探索,都会给我们提供一次十分有趣的消遣.

我们沿用前面规定的记号:记斐波那契数列的第 n 项为 f_n,令 $f_1=f_2=1$. 则该数列的:

$$头 n 项和 = f_{n+2} - 1,$$

$$头 10 项和 = 11 \cdot f_7,$$

$$f_n f_{n+1} - f_{n-1} f_{n-2} = f_{2n-1},$$

$$f_{n-1}^2 + f_n^2 = f_{2n-1}.$$

在较为复杂的关系中，有两则特别有趣：

(1) 能够证明，若 f_p 是一个素数 ($p > 4$)，则 p 也必是素数. 例如，$f_{11} = 89$ 是一个素数，则 11 是素数.

反过来的结论未必成立. 例如 $p = 31$ 是素数，而 $f_{31} = 1346269 = 2417 \times 557$ 却不是素数.

(2) 能够证明，若 p 是素数，则

$$f_p = ap + 1 \quad (若 p = 10k \pm 1),$$

$$f_p = bp - 1 \quad (若 p = 10k \pm 3).$$

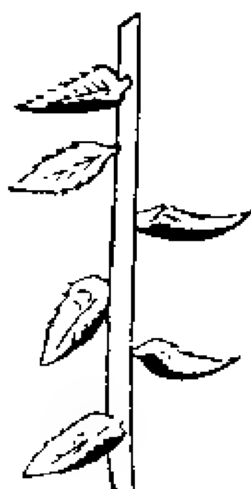
这里 a, b, k 均为整数. 例如，下表所列： [19]

$p = 10k \pm 1$	f_p	$p = 10k \pm 3$	f_p
11	89	7	13
19	4181	13	233
29	514229	17	1597
31	1346269	23	28567
41	165580141	37	24157817

反过来的结论未必成立. 如 $f_{14} = 377 = 27 \times 14 - 1$，这里 14 不是素数.

在严格数学的遥远边界，同样有着斐波那契数列的踪迹. 让我们回到植物学领域，去查找一些使人感兴趣的斐波那契数列的迷人脚踪. 可以利用房子周围的平常的植物、花、果等等. 我们将会看到一种称为叶序的现象，它意味着植物的叶子在枝干上的排列.

这里我们有一根樱树的枝条(图2-11). 假如用一根细线，


图 2-11

从它的一片叶子连到下一片，然后沿枝条的方向环绕着连到再下一片叶子. 如此这般，我们会发现一种螺旋形的结果. 每经五片叶子，便回到了相对于原先的初始位置，接着进入了第二个循回.

叶子的排列，能够用以下的分数来表示：

$$\frac{\text{完成的旋转数}}{\text{每循回的叶数}}.$$

在樱树的情况下，这种叶序为$\frac{2}{5}$. 橡树及许多其他树和植物，大多与之相同. 在一些情况下，例如榆树，它的叶子交错着长在枝干的相对位置，所以其叶序为$\frac{1}{2}$. 对于普通的山毛榉，每经三片叶子便完成了一个循回，重新回到相对于初始的位置，则其叶序为$\frac{1}{3}$. 其他的例子，梨树为$\frac{3}{8}$，柳树为$\frac{5}{13}$.

假如你着力于寻觅的话，你还会找到更加丰富的例子. 很多草的叶序为$\frac{1}{2}$，但更常见的是$\frac{1}{3}$. 花也提供了许多实例. 郁金香的叶序一般为$\frac{1}{3}$，它那变化自叶子的花瓣，排列于两个三分轮生体上，其位置引人注目地以螺旋的方式叠转.

的确，这种存在于叶子和花中间的现象，似乎与它们各自的品类及植物学的种属相关联，并遵从着一种特殊的叶序.

有趣的一点是：所有的叶序"分数"，都是由斐波那契数列交错的两个数组成. 除非损坏或异常的扭曲而改变了那里的整个排列，不然的话，绝对找不出一种植物，其叶序的分数比，会与这一规律相违背！

斐波那契数列中，这类更高的比，大多在短茎植物中都已找到. 如$\frac{13}{34}$，$\frac{21}{55}$这样的比，在许多玫瑰类植物及松果鳞片的排列

中，都可以看到.

由松果，菠萝，以及向日葵种子的排列，我们可以发现一些相当不同的东西. 松果的鳞片是真正变化了的叶子挤在一起，并连在一个非常短的茎上. 直观上，我们无法像真的叶子那样去找它的叶序. 然而，我们能够检查到某种明显的螺旋形排列. 这就是那些与“叶子”直接关联着的侧向“并行节带”. 这些节带的“叶子”之间，在松果的轴上，侧向距离最小.

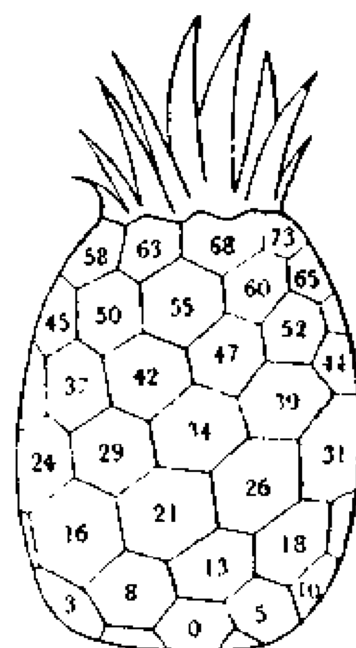


图 2-12

图 2-12 描画的是一个菠萝的示意. 其鳞片分别标上了号码，号码顺序与菠萝鳞片在轴上的侧向距离的大小、顺序相当：鳞片5要比鳞片 4 在轴上的位置(沿着朝顶上叶冠的方向)稍“高”一些，这由观察都能判断出来；类似地，鳞片 4 也比鳞片 3 稍“高”一些.

侧向并行节带的三种截然不同的类别是很明显的. 其一，以 0，5，10 等为代表，依较小的角度盘旋上升. 其二，以 0，13，26 等为代表，沿同一个方向盘旋上升，但十分陡峭. 其三，以 0，8，16 为代表，朝着相反的方向.

现在，我们想象能够像图 2-13 那样把菠萝的表面摊开，而鳞片上依旧附有标号.

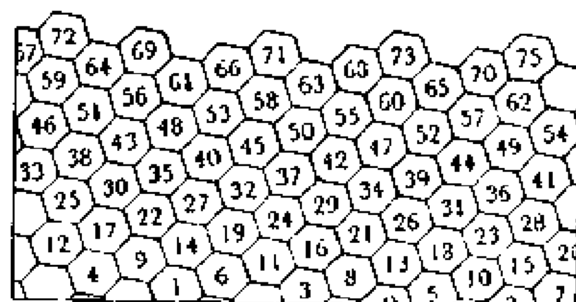


图 2-13

这里，并行节带的三个不同系列显示得非常清楚. 由于菠萝鳞片是不规则的六边形形状，所以我们能够注意的也只是这三类实际相连接的鳞片. 而这三个系列所提供的数列，有着各自的公差，分别为 5，8 和 13，而这正是斐波那契数列连续的三个数.

一个简单的数列，居然能挖掘出如此多样性的联系，这难道不足以令人惊讶吗？在人们的感知中，这种大自然的鬼斧神工，真是其妙无穷！[22]

第3章　神秘的阵列

本章我们将涉及一种纯然消遣性的数学内容.古往今来,对于这种具有某种性质的数的阵列的构造和研究,都完全是从数的方面加以考虑,而对其实际应用方面,则全然避而不谈!

在这一论题下保留下来的,能够像幻方那样,被数学彻底研究过的古老项目,实不多见.有关幻方的数学及其神秘的特性,曾被无数的书籍、论文和一些小册子所记载.

几个世纪来,幻方似乎并不注重于它在实际应用上的作为(那些占星家和神秘论者的用途除外).尽管幻方在文化科学探索方面也有它的一定地位,但那个世界似乎只有判断"怎样才好?"这样的问题,这无疑是悲哀的,纵然我们对此评说已经为时过晚.现在还是让我们去浏览一下,幻方世界那令人神怡的地方.

我们似乎无法准确指出人类第一次记录下幻方的时间.但传说在基督诞生前的好几个世纪,一位中国皇帝在龟背上发现了一个称为"洛书"的幻方.该幻方有如图 3-1 所示(当然,原先并非用阿拉伯数字),约见之于公元前 1000 年.

这个特殊的正方形在中国有着漫长而神幻般的历史.在那里常用它作为护身符或者吉祥物.有些赌场的台板,甚至用它作为参与者识别的标志.

上述幻方的变幻常数为 15,也就是说,幻方横的三行,纵的三列,以及两条主对角线上的每三个数字的和,都等于 15.读者

在这里看到的，填在九个方格或小洞里的是从 1 到 9 的整数. 然而，许多别的三阶（3 × 3）幻方，也可能用别的数字来构造. 所以 我们约定，除非有特殊的说明，今后我们讲n阶幻方，则总是[23] 指由 1 到 n^2 的整数构成的标准幻方.

四阶幻方和它的一般性质，可以通过一些具体的例子加以定义.

8	3	4
1	5	9
6	7	2

图 3-1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图 3-2

15	10	3	6
4	5	16	9
14	11	2	7
1	8	13	12

图 3-3

图 3-2 所示的是最著名的幻方之一. 丢勒（Albrecht Dürer）把它塞进一幅描绘知识分子犹豫情调的铜版画《忧郁》之中. 这种把一个杂乱无序的阵列，用科学的手段加以构造，正表现了这位思想家的思维深度. 丢勒在他幻方底部一行的中间，构造了两个数：15，14. 而这正是该画创作的年份.

丢勒幻方和所有四阶标准幻方的变幻常数均为 34，也就是四阶幻方的行、列和两条主对角线上每四个数的总和为 34. 而这个数可以作为归属四阶标准幻方的依据. 图 3-3 所示的是一种称为“魔鬼”的幻方，也叫全幻方或全对角幻方. 这种幻方沿副对角线也具有幻方的特性（如 15 + 8 + 2 + 9；4 + 10 + 13 + 7；等等）. 丢勒幻方另有一些特性，它还有五组总和为 34 的四连方格，这就是图中黑体线所分的四个部分，以及正中央的四个数. 图 3-3 则有着额外的性质：任何一个 2 × 2 的阵列，其和都为 34. 甚至连那些想象方式的排法，如 15—10—1—8 等等，都可以看成是 2 × 2 阵列的延续. 这样，我们便可以找到更多的 34.

任何一个 n 阶幻方的变幻常数为：

$$\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

于是,四阶幻方变幻常数为 34,五阶幻方变幻常数为 65,如此等等.

今天人们已经知道不同的四阶幻方共有 880 种,那些通过旋转或者反射得到的还不计算在内. 这 880 种中魔鬼幻方占了 384 种. 在娱乐数学中目前还留有一个问题尚未解决,那就是 n [24] 阶幻方准确地有多少种类?二阶幻方是不存在的(除非我们用四个相同的数,但这不符合规则);三阶幻方也只有一种,虽然通过旋转或反射能得出八种花样,但依然是那种基本的模式. 四阶幻方有 880 种. 高阶幻方的种数无疑是更为可怕的数目,这从 5 阶幻方便能略知一二. 人们已经知道,不同的 5 阶幻方多于 13000000 种,其准确的数量,目前尚无人知晓. 5 阶魔鬼幻方共有 3600 种(如把旋转和反射也算在内则有 28800 种). 而这 3600 种魔鬼幻方已由密克萨(Francis L. Miksa)制表列出. 据说,密克萨是从图 3-4 所示的四种基本魔鬼幻方入手,通过直线转换的方法找到的.

18	24	5	6	12
10	11	17	23	4
22	3	9	15	16
14	20	21	2	8
1	7	13	19	25

15	18	21	4	7
24	2	10	13	16
8	11	19	22	5
17	25	3	6	14
1	9	12	20	23

20	22	4	6	13
9	11	18	25	2
23	5	7	14	16
12	19	21	3	10
1	8	15	17	24

13	17	21	5	9
25	4	8	12	16
7	11	20	24	3
19	23	2	6	15
1	10	14	18	22

图 3-4

下面我们给出几种构造任意阶幻方的简单办法. 在这一章里,我们总提到一些"小格",今后这些小格,也可能泛指为幻方内部的某个独立的方块. 用这样的小格来构造奇数阶幻方,可能是我们目前知道的最为容易的办法. 还请大家仔细地审视图 3-5 的五阶幻方,稍后我们将用它来解说一般性的构造方法.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

图 3-5

	18	25	2	9	11
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

图 3-6

65	86	17	38	59
83	29	35	56	62
26	32	53	74	80
44	50	71	77	23
47	68	89	20	41

图 3-7

注意到在很多情况下，在幻方的一条对角线上，排列着连续的整数. 图 3-6 所示的是一种称为劳伯尔(de la Loubère)的构造法：从带 1 的小格开始，它位于顶部的中间，接着在它右上对角的地方，写下后继的整数 2. 要说明的是，在一般情况下，如果下一个要写的数落到阵列所限定的范围之外，那么我们要想象该格是从阵列反向的对应点开始. 比如，这里的 2 是落在 1 右上[25] 方想象的小格中，那么与此反向的对应点，位于阵列底行的第四个小方格，即应在这一小格写 2，然后在它的右上对角写 3，在 3 的右上对角写 4. 由于这个 4 落到阵列限定的范围之外，所以又可以把它看成是从横向相反的对应点开始，即在左列的第三个小格写 4，而后在 4 的右上角写 5. 当准备在 5 的右上角写 6 时，你会发现已经没有位置了，它已经被前面的 1 所占据. 遇到这类情形，我们可以在该格的下面一格重新开始我们的规则. 例如，在 5 的下面写 6，在 6 的右上角写 7 等等. 还有一种情形，即写完 15 之后，原应回到阵列的左下角去写 16，然而那个地方已被 11 所占据，所以也必须把 16 写在 15 的下一格. 有了以上两种可供核查的办法，我们便能大致保证在应用规则时不出差错. 另外，我们看到：占据阵列中央格子的是第 $\frac{(n^2+1)}{2}$ 项(在所示的 5 阶幻方中为 13)，而序列的最后一项，第 n^2 项，则落在底行的中间一格. 我们终于构造出了一个正规的，但不是"魔鬼"的幻方.

劳伯尔的方法，可以用来作这样一类奇数阶的幻方，这类幻

方中的数则是整数等差数列的项.遵照规则,我们可以构造出图3-7那样的幻方,其整数序列从17开始,逐项相差3(17,20,23,26,等等).幻方的常数为256.

首项为整数 A,公差为 D 的数列所构成的 n 阶幻方,其变幻常数等于:

$$n\left[\frac{2A+D(n^2-1)}{2}\right].$$

对于标准幻方 $A=D=1$,上述公式化为29页的那个公式.

另一种构造奇数阶幻方的方法为麦哲里克(Bachet de Méziriac)所设计,它与劳伯尔方法极为相似.这里数1是放在正 [26] 中央方格的上方,写数的方法也遵从劳伯尔的对角线规则,只是遇到被占据的情况时,不是像劳伯尔方法那样落下一格,而是提高两格重新开始.至于在西南-东北对角线上的处理方法与劳伯尔方法相同.图3-8所示的是用麦哲里克方法构造的7阶幻方.

46	15	40	9	34	3	28
21	39	8	33	2	27	45
38	14	32	1	26	44	20
13	31	7	25	43	19	37
30	6	24	49	18	36	12
5	23	48	17	42	11	29
22	47	16	41	10	35	4

图 3-8

偶数阶幻方的构造总的来说要比较困难些.下面我们介绍一种一般性的方法和两种较为特殊的方法.

一般性的方法要归功于海尔(de la Hire)(明眼的读者大概会发现,法国人对幻方有着特别的兴趣).我们将用海尔的方法来构造一个四阶幻方.需要的话,同样的方法可以用来构造任意的偶数阶幻方.

首先,像图3-9(a)那样,在两条主对角线上依次写下从1到4的数,然后像图3-9(b)那样用同样的数填写,使得每行每列的和都等于10(对于任意的 n 阶幻方——n 是偶数——我们要在 $n\times n$ 阵列的两主对角线上写下从1到 n 的数).现在调换行列位置,使从图3-9(b)变为图3-9(c).在图3-9(b)和图3-9(c)中出现的数,我们将作为原始数.

(a)

1			4
	2	3	
	2	3	
1			4

(b)

1	3	2	4
4	2	3	1
4	2	3	1
1	3	2	4

(c)

1	4	4	1
3	2	2	3
2	3	3	2
4	1	1	4

图 3-9

在图 3-9(c)中用“根数”去替换原始数，将得到图 3-10(a)(根数可见图 3-10 旁边的表)，而后将图 3-10(a)与图 3-9(b)的数对应相加，这样，我们就得到一个如图 3-10(b)所示的四阶幻方，其变幻常数为 34.

[27]

对于任何偶数阶幻方，其根数可由相应的原始数计算得出.

原始数	根数
1	0
2	4
3	8
4	12

(a)

0	12	12	0
8	4	4	8
4	8	8	4
12	0	0	12

(b)

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

图 3-10

根数的计算公式是：

$$根数 = n(p-1).$$

这里 n 是幻方的阶数(偶)，p 为原始数($p=1, 2, 3, \cdots, n$). 例如，

6 阶：	原始数：	1	2	3	4	5	6，				
	根　数：	0	6	12	18	24	30；				
10 阶：	原始数：	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10，
	根　数：	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90.

在给出原始数之前有一个步骤，就是要使方块中的数，行或列都有相同的和. 对于 4 阶正方块来说，我们在构造中取 10. 其实，这就是数 1，2，3，4 的和. 对于 n 阶幻方来说，这个初始的

和总是：

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

图 3-11 是一个用海尔方法构造成的 8 阶幻方. 先是用 1 到 8 的数填写两条主对角线，而后再用这些数字去填写剩下的空格，使得每一行及每一列的和都等于 36. 然后再按前面概略提到的一般性程序运作. 在这种情况下所需的表为：

1	63	62	4	5	59	58	8
56	10	11	53	52	14	15	49
48	18	19	45	44	22	23	41
25	39	38	28	29	35	34	32
33	31	30	36	37	27	26	40
24	42	43	21	20	46	47	17
16	50	51	13	12	54	55	9
57	7	6	60	61	3	2	64

图 3-11

8 阶：原始数：1 2 3 4 5 6 7 8，

根　数：0 8 16 24 32 40 48 56.

有两种相关联的简单方法，可以用来构造两种基本类型的偶数阶幻方，即 $n=4m+2$ 型（如 $n=6, 10, 14, 18, \cdots$），或 $n=4m$ 型（如 $n=4, 8, 12, 16, \cdots$）. 它们分别相应于单偶阶幻方和双偶阶幻方. [28]

下面我们用斯特拉兹(Ralph Strachey)方法来构造一个单偶阶幻方，例如一个 6 阶幻方，这里 $6=4m+2, m=1$.

A	C
D	B

图 3-12

如图 3-12，这里形式上分成四块，每四分之一都用 1 到 36 中的数字组成（在方块 A 中用 1 到 9，B 中用 10 到 18，C 中用 19 到 27，D 中用 28 到 36），而且每块都是用劳伯尔方法构造出的 3 阶幻方.

现在 A 的中间行取 m 个小格，而后在 A 的其他行的左侧边缘也各取 m 个小格，并将它们与 D 中相应方格内的数字相交换. 接下来交换 B 与 C 接近右侧边缘的 $m-1$ 列. 图 3-14 便是所得的结果. 它就是一个 6 阶幻方. 图 3-14 最后一列与图 3-13 并无不同，那是因为交换 $m-1$ 列，在我们的例子中相当于交换零列，即无交换. 图 3-15 是用这种方法构造出的 10 阶幻方，那

里在构造中就发生了沿方块 C 与 B 右边缘列的交换.

8	1	6	26	19	24
3	5	7	21	23	25
4	9	2	22	27	20
35	28	33	17	10	15
30	32	34	12	14	16
31	36	29	13	18	11

图 3-13

35	1	6	26	19	24
3	32	7	21	23	25
31	9	2	22	27	20
8	28	33	17	10	15
30	5	34	12	14	16
4	36	29	13	18	11

图 3-14

92	99	1	8	15	67	74	51	58	40
98	80	7	14	16	73	55	57	64	41
4	81	88	20	22	54	56	63	70	47
85	87	19	21	3	60	62	69	71	28
86	93	25	2	9	61	68	75	52	34
17	24	76	83	90	42	49	26	33	65
23	5	82	89	91	48	30	32	39	66
79	6	13	95	97	29	31	38	45	72
10	12	94	96	78	35	37	44	46	53
11	18	100	77	84	36	43	50	27	59

图 3-15

双偶阶幻方的构造则更为简单. 仅以四阶情况为例，如图 3-16 所示，这里正方阵列的 16 个小方格，已按横向的次序依次填写下了从 1 到 16 的数字. 现在把对角的一对对数，像图上所标的那样相互转换，即得到图 3-17 所示的四阶幻方. 构造阶数更高的双偶阶幻方，可以使用同样的技巧. 如 8 阶幻方，可如图 3-18 所示，在已按横向的次序写下了从 1 到 64 数字的正方块中，实施对角转换（为避免线条混乱，图中只标出一半的转换记号，另一半则可类似地实施）. 其结果就是图 3-19 所示的 8 阶幻方.

[29]

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

图 3-16

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

图 3-17

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

图 3-18

64	2	3	61	60	6	7	57
9	55	54	12	13	51	50	16
17	47	46	20	21	43	42	24
40	26	27	37	36	30	31	33
32	34	35	29	28	38	39	25
41	23	22	44	45	19	18	48
49	15	14	52	53	11	10	56
8	58	59	5	4	62	63	1

图 3-19

在幻方的种类中还包括一种乘法幻方.图 3 20 所示的就是这样一种幻方,它的任何一行,任何一列,以及两条主对角线上的积都等于 4096.这是很容易构造出来的:先给出一个由 0 到 8 的数组成的三阶幻方,然后把相应的数字,换成以 2 为底相应的方幂.用其他的常数作底,也可以得出乘法幻方.

128	1	32
4	16	64
8	256	2

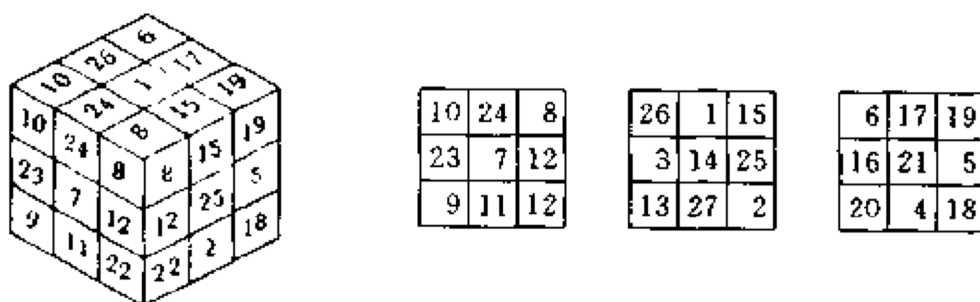
图 3-20

46	81	117	102	15	76	200	203
19	60	232	175	54	69	153	78
216	161	17	52	171	90	58	75
135	114	50	87	184	189	13	68
150	261	45	38	91	136	92	27
119	104	108	23	174	225	57	30
116	25	133	120	51	26	162	207
39	34	138	243	100	29	105	152

图 3-21

加乘双料幻方是很著名的(构造它并不那么容易).它不仅[30]对于加法,而且对于乘法,都具有致幻的性质.图3-21就是这样一种幻方,其加法变幻常数为840,而乘法的变幻常数为2058068231856000.如果读者有雅兴的话,不妨试着验证一下!

幻立方是由平面幻方堆置而成,而且可通过规范的程序加以构造[1].图3-22展示了一个3阶幻立方的透视图象,并剖开成3个3阶的平面幻方.该幻立方的变幻常数为42.这个立方体的全部27个行和列,及四条主对角线上的每三个数的和等于它.



10	24	8
23	7	12
9	11	22

26	1	15
3	14	25
13	27	2

6	17	19
16	21	5
20	4	18

图 3-22

最有趣一类莫过于多重幻方.这种幻方一方面具有通常幻方的性质,另一方面把幻方里的数各自平方(或更高的方幂)后所组成的阵列,依然是幻方!图3-23展示的就是这样一种双重幻方,它的变幻常数为260,如果把它的数各自平方后将得出一

① 译者注:这里对幻立方的定义似乎有些偏颇.实际上幻立方的定义应该是:用1至n^3的自然数,填入n^3个小立体,使得立体的每一个剖面正方形上的每行、每列、每条对角线,以及立方体的四条对角线上的每n个数的和都等于定数.读者只要验证一下图3-22剖面的对角线,就知道,该图所提供的不符合上述幻立方定义的要求.本书所说的幻立方可由"规范程序"构造,也是指书上的那种理解.即只考虑立方体的对角线,不考虑各剖面的对角线.

实际上幻立方的构造是很困难的.已经证明三阶、四阶幻立方不存在.五阶、六阶幻立方是否存在,至今人们尚不清楚.七阶幻立方已经有人做出.八阶幻立方诞生于1970年,其作者还是一位中学生哩!

个新的幻方，它的变幻常数为 11180.

三重幻方是指原幻方的数，不仅各自平方后所构成的阵列是幻方，而且各自立方后所构成的阵列还是幻方. 已知能够实现上述条件的最小的一个幻方是 64 阶的！[31]

16	41	36	5	27	62	55	18
26	63	54	19	13	44	33	8
1	40	45	12	22	51	58	31
23	50	59	30	4	37	48	9
38	3	10	47	49	24	29	60
52	21	32	57	39	2	11	46
43	14	7	34	64	25	20	53
61	28	17	56	42	15	6	35

图 3-23

让我们暂时离开数学阵列的王国，去关注一下词幻方的例子. 这一由数学幻方分裂出来的种类，也使数学家们感到兴趣.

早期的词幻方，可能是一种纵横字谜. 即在一个 n 阶的阵列中，所有的方格都被字母占据，而它的行或列却形成一个个单词. 这无疑不是非常容易的.

图 3-24 收集的是一些小巧玲珑的词方——我们省略去它的构造方法(甚至于构造它的数学方法).

G	A	P
A	R	E
P	E	T

R	A	R	E
A	V	I	D
R	I	S	E
E	D	E	N

B	I	S	H	O	P
I	M	P	A	L	E
S	P	I	N	E	T
H	A	N	G	A	R
O	L	E	A	T	E
P	E	T	R	E	L

图 3-24

图 3-25 所示的是一个古老的拉丁词方，它形成了一个句子，意思是：一个叫阿列普的播种者，由于他的工作而耽误了他的纺织.

S	A	T	O	R
A	R	E	P	O
T	E	N	E	T
O	P	E	R	A
R	O	T	A	S

图 3-25

T	O	T	I
E	M	U	L
E	S	T	O

图 3-26

图 3-26 所示的是出现在德克萨斯州的一个柱状台体上的神秘雕刻.

用另一类的"幻"方,还可以玩一种令人惊异的戏法. 在图 3-27 所示的阵列中,请一个人从中随便取一个数,然后把该数所在的行和列的其他数统统删去. 接下来请他再取一个没有删去的数,又把这个数所在行列上的其他数删去. 如此这般,经过五次之后,再也没有数留下来了. 这时所取出的五个数的和,总是 666[①]. 不信可以试试!

[32]

125	191	248	169	116
48	114	171	92	39
136	202	259	180	127
69	135	192	113	60
64	130	187	108	55

图 3-27

	17	83	140	61	8
108					
31					
119					
52					
47					

图 3-28

666 这个数的出现是一种随机的安排,只要愿意,我们可以构造出其他的方块,以突出和强化任何其他的数.

上述戏法的秘诀出奇地简单. 事实上,666 可用上千种不同的办法分为 10 个数的和. 我们任取其一,以作说明的例子:

8, 17, 31, 47, 52, 61, 83, 108, 119, 140.

按任意的顺序把上列的数写在图 3-28 所示的 5×5 格子框的外边. 现在把这些数的和,填写在相应于它们的行和列交叉点

① 译者注:原书作者称 666 是一个"兽的数". 其实,在世界许多国家的民俗中,666 被认为是一个很吉祥的数字.

的空格子上(例如 31 + 140 = 171). 在整个秘诀的叙述中,除把 666 分为 10 个数的和之外,再没有什么更起眼的东西了! 很明显,同样的方法可以用来构造这样的阵列,使它突出我们预先选定的数.

似乎幻方的好处除了提供数学乐趣或制作一些戏术之外,再也谈不上什么了!

然而对农业的探索,使得一种称为拉丁方的幻方有了更加进一步的应用. 费雪(R. A. Fisher)在英格兰的一个实验站里,开创了用希腊-拉丁方于农业实验的先河. 图 3-29 所示的两个拉丁方,其阵列中只用到数 1 至 4,而它的行或列的和为常数 10 (作为拉丁方起点的偶数阶幻方构造,已在 31 页加以概述). 现 [33] 在把两个拉丁方结合起来,便得到了图 3-30 所示的希腊-拉丁方.

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

图 3-29

11	22	33	44
23	14	41	32
34	43	12	21
42	31	24	13

图 3-30

设想我们希望试验四种肥料 1, 2, 3, 4, 在肥性参差不齐的田地里,对某种小麦生长的影响,那只要按普通拉丁方的排列来种植小麦和分配肥料. 统计分析能够很容易地排除土壤肥性的影响,测定出每种肥料的实际效果. 然而,使用希腊-拉丁方,我们还能测出四种不同的肥料对四个不同小麦品种 1, 2, 3, 4 的影响. 具体做法是:按一种拉丁方配给肥料,而按另一种拉丁方分配麦种. 这一肥料-小麦的模式,也就构成了希腊-拉丁方. 土地则按图 3-30 的方案种植. 每一品种的小麦与相应的肥料配合,从而消除了土地耕种上的混乱. 很明显,更高阶

的拉丁方①,将使土壤变化的影响减到更少.而统计分析则能测定出每种肥料对于每种小麦的实际效果.

在更近的年代,对原子的探索也从幻方的思考中受益.人们发现,在原子反应堆中可以借鉴幻方的格局去排放某些物质.人们还发现,对于像市场及社会学这样的领域,希腊-拉丁幻方也有着有价值的应用.以上这些,给了我们这样一种启示:对某些内容的研究是不应该急功近利的.判断一件东西是否有价值,有时需要时间!

已经写了许多,但依然留下许多有关幻方和数阵的问题,等待着人们的发现.我们面对着的将是一个庞大的组合数学分支.[34]本章则仅仅在多样性和应用方面,作一种抛砖引玉的介绍罢了.

① 原注:至七阶为止的拉丁方的总数如下表:

n 阶	N
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61428210278400

第4章 拓扑趣谈

也许只有亲眼所见，才能令人相信. 许多数学的外貌，对于一些知识贫乏的人，只是一种充满怀疑的陈述！相对论是其中的一种，电子计算机的奇迹，对四维或高维空间的研究，还有拓扑学等等都是.

爱因斯坦(A. Einstain)的相对论为众多的物理实验所认可，但理论自身的一些难以置信的逻辑推论，却因那几乎无法克服的测度问题，而横遭指责. 计算机能够记忆，甚至还有人相信它确实能思考，但对大多数的人而言，它却自始至终存留着一种无法理解的神秘①. 而像空间的第四维那样，有时就连数学家也无法使其形象化！

什么是拓扑？人们称之为“橡皮膜”上的几何，而这种称呼确实给人一种非常自然的暗示. 首先，我们说拓扑包含了对一些现实中未必有的奇特对象的研究，诸如单面的纸张，封闭的但却没有内部的瓶子，等等. 这样的物体能不能构造出来？能够的！并且通过这些构造，把人们思想中认为不可能的观念，转变为完全可以理解的东西.

取一张狭长的纸条，扭转半圈并把端头接在一起，形成图

① 译者注：70年代人们对于计算机的认识确实如此，但随着时日的推移，科技的进步，计算机的更新和普及，人们的观念也今非昔比，抱有这种神秘感的人，已经为数极少.

4-1 所示的那种带子. 如果你用一把铅笔沿着中线画下痕迹(如图中描画的虚线), 你将最后回到原来的出发点——这自然不会[35]使人感到意外. 但你会发现, 这种带的两面都有铅笔做过的记号! 而没有跨过纸的边缘. 这就是茂比乌斯带, 一种确确实实的单侧曲面. 更有甚者, 它只有一个边缘!

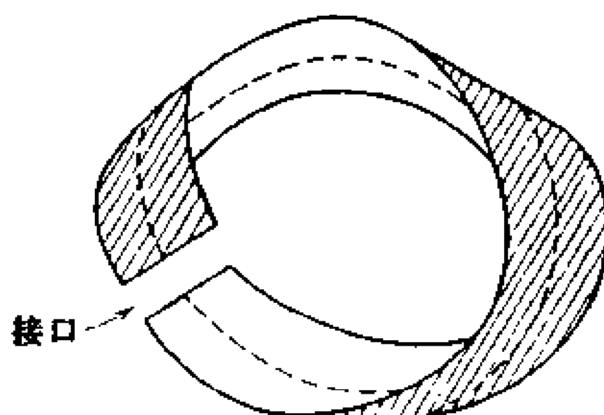


图 4-1

这个值得注意的物体, 后来以伟大的德国数学家茂比乌斯(Augustus Möbius)的名字命名. 公元 1855 年, 他由于创造性的工作, 而获得了广泛的声誉. 然而, 早在 1847 年, 在一篇利斯汀(J. B. Listing)所写的论文里, 就曾以此为主题! 像这样的情况的确是很特殊的.

图 4-2 表现了一个没有"内部"的封闭的瓶子的构造过程. 那是由一个弯曲的材料管筒, 一个端头穿过管壁而与另一个端头连接在一起, 形成一个连续而封闭的曲面. 正常地, 一个三维物体的表面是连续而封闭的. 当我们穿透表面进入内部后, 只有

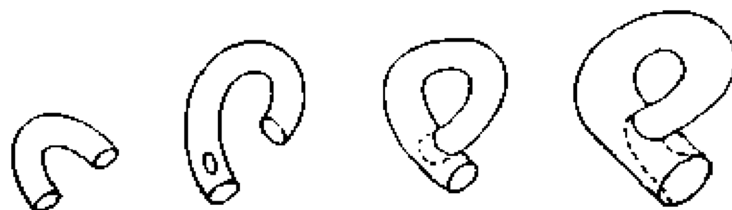


图 4-2

再次穿透方能逸出. 但克莱因(Klein)瓶却不是这样. 我们从外部穿透瓶壁，在瓶的"内部"旅游了一下，无需再次穿透瓶壁，使能从"开口"逃逸出来！

下面所说的两种，是人们通常认为"办不到"的事情！其一，对克莱因瓶，找不到瓶的底部，液体很容易从中漏出来. 其二，古朱力契公司的专利，用茂比乌斯带作为机器的传送带，"两面"其实只有一面，使带子看起来像是通常带子长度的两倍.

拓扑学在理论上包含了许多复杂的概念. 事实上，该领域有许多问题至今尚未解决. 因而对于年轻的孩子，要更多地用实际方面的内容去加深他们的理解，使得他们能够愉快地游览这一富有挑战性的领域.

在众多数学领域作出贡献的欧拉(Leonard Euler)，第一个真正地研究了一个拓扑学的问题. 哥尼斯堡城坐落并横跨于普雷格河，且包含了河心的克尼霍夫岛及另一个岛屿，那里有七座桥连接了该城市的各个部分，就如图 4-3 所示的那样(现今已有 8 座桥). 在 18 世纪，那时的问题是：要求走过这七座桥中的每一座，而且只走过一次，并于最后回到原先的出发点. [36]

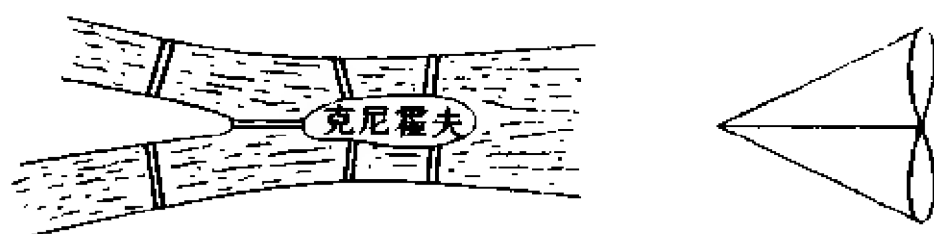


图 4-3

欧拉把该问题转换为一个同等的图式(如图 4-3 右所示). 从这个图式出发，他证实了在给定条件下该问题不可能有解答. 这里所说的条件，当然包括应逗留在该城市的范围之内，而且通过散步能够从陆地的一边到达另一边. 在图式中每个顶点都对应着陆地中的一块，而线则对应着桥.

欧拉所建立的一般性规则是这样的：一个连通的线的网络，能够没有折回地走通，则网络中的奇点个数，要么是0，要么是2. 这里的奇点是指这样的顶点，由它射出的线枝数目是奇数. 在哥尼斯堡七桥问题的网络中，我们可以看到四个奇点，因而这个网络不能没有折回地走过.

图4-4没有奇点，图4-5有两个奇点，于是上述两个网络能够用铅笔，笔不离纸且不折回地画成(通称一笔画). 那么，有关图4-6及图4-7的图样又将如何呢?

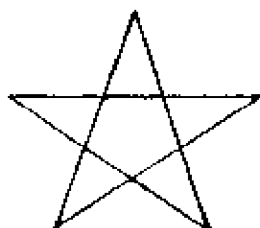


图 4-4

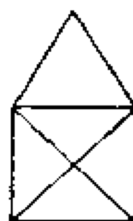


图 4-5

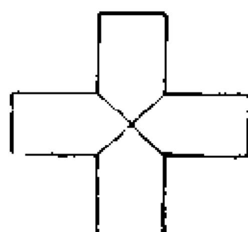


图 4-6

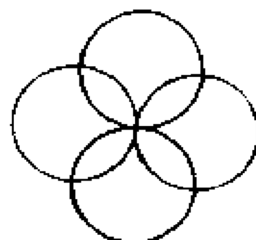


图 4-7

欧拉还发现，对所有连通的网络有：

$$V - L + R = 2,$$

这里V=网络的顶点数，L=网络在顶点之间的线枝数，R=网络分离出的区域数(在网络之外的平面的无限部分算为一个区域). 在图4-8中，$V = 10$, $L = 15$, $R = 7$，而$10 - 15 + 7 = 2$. [37] 图4-9则更为简单，我们有$V = 5$, $L = 10$, $R = 7$，而$5 - 10 + 7 = 2$.

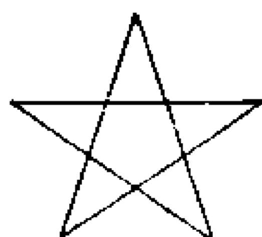


图 4-8

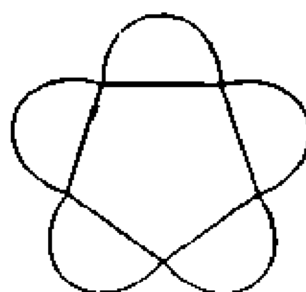
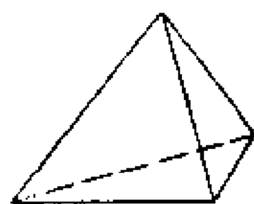


图 4-9

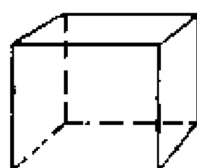
值得注意的是，同一个公式当我们从二维平面转为三维立体时也能应用. 对于任意的多面体，我们有：

$$V - E + F = 2,$$

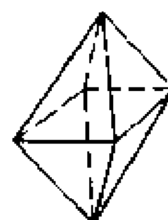
这里 V＝多面体的顶点数，E＝它连接顶点的棱数，F＝它的面数. 图 4-10 所示的三个正多面体，你可以用它来检验这个公式.



四面体



立方体



八面体

图 4-10

关于平面连通网络的欧拉一笔画原理，也同样可以用于画多面体的棱. 立方体有 8 个奇顶点，因而它不能用一笔画画成. 而右边的八面体，则能用一笔画画成.

迄今为止，我们所触及的仅是一些与单面的形体、二维及三维网络模型等相关联的拓扑思考. 然而拓扑学所研究的则是那些在变形下不受影响而保持不变的几何图形的性质. 在拓扑变形中人们感兴趣的只是图形的位置，而不是它的大小！

［38］

把一个圆投射到一个平面上，我们会得到一个圆，或一个椭圆，或一条直线段，具体有赖于原始圆所在的平面与投影平面之间的倾斜程度.

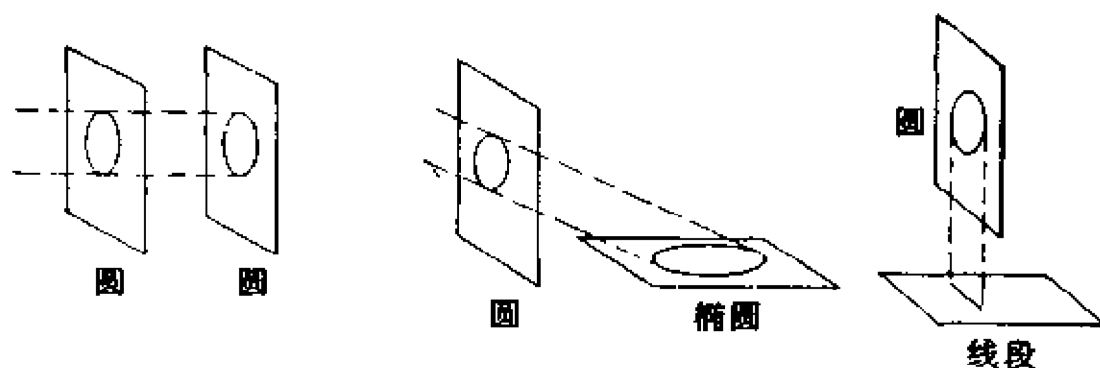


图 4-11

在图 4-11 中，我们看到的是平行投影. 但对于像光线集中或分散那样的非平行的投影，我们会得到形状相同，但尺寸缩小或放大了的结果. 如若我们用与初始圆中心不对称的非平行投影，我们会得到包括抛物线和双曲线在内的全部圆锥截线，以及由半径无限的圆所投射出的长度无限的直线. 可见图 4-12.

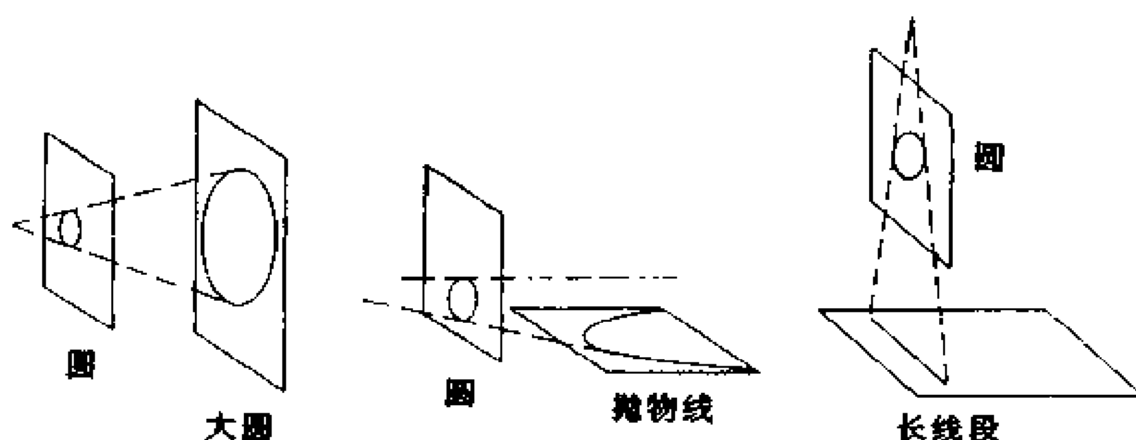


图 4-12

在上述严格的投影下，什么性质依然保持不变呢？初始圆和它的全部投影线(含直线)都属于圆锥曲线族. 一个正方形就不

属于这样的族.我们能够把正方形或一个平面图形通过投影得出一条直线,但我们决不可能把一条直线或圆锥曲线通过投影[39]而得出一个正方形.虽然通过投影许多特性都改变了,但初始圆作为圆锥曲线族的成员的资格,却依然保留.

现在我们对作为主体的圆,作更大幅度的处理.假设它被画在一张橡皮膜上,那么它便能很容易地通过弹性物质的拉伸而变为正方形.在这种情况下对变形所施加的唯一限制是,橡皮膜在拉伸时不能被撕裂.那么,在这样的变形下,还会有哪一些圆的性质残留下来呢?我们说,尽管拉伸的结果可以是正方形,也可以是任何其他的图形,但有一点始终不会变,那就是图形的内部和外部.它还跟原先的初始圆一个样!

这看起来似乎是一个很平常的结论,然而它所包含的却是一种影响深远的结果,它使得我们可以在一种非常简单的假定和极少数的规则下,去研究为数众多的图形:正方形、三角形、圆、椭圆、国家的疆界、所有规则或不规则的多边形等等.对所有这些图形的边缘,我们全然不感兴趣,而感兴趣的只有两个,即内部和外部.这些图形我们全部看成同一种的结构类型.拓扑地讲,它们全都等价.

在二维空间研究等价的对象,我们必须将橡皮膜换为粘土块或塑胶块.一个粘土球能够变形为一个立方体、多面体——对称的或不对称的.但这里我们也有一个关于变形的限制:即对粘土块我们可以作任何程度的捏、压、拉、伸,但不允许断裂或在它表面上戳洞.否则的话,我们就能够把原先的粘土球做成一个油炸圈饼,一个有耳杯,一个铃,或一切与油炸圈饼拓扑等价的结构.油炸圈饼和球在拓扑上是不等价的.

平面图形及空间立体可以这样来规定它们的拓扑等价:即如果存在一种变形,能够把其中一个变为另外一个,但变形过程中不允许实际上的撕裂或断开.

等价有时很难确定.试检查图 4-13 所示的两种结,你说它

们等价吗?

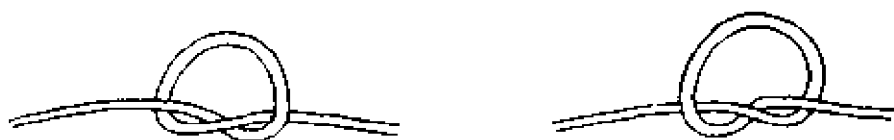


图 4-13

这个问题可以这样考虑,即左边的结怎样才能变形为右边呢?这种变形很明显地需要切断绳子.当然我们是不允许解开结的!而切断绳子即意味着对粘土球断裂或者戳洞.因此图 4-13 的两个结是不等价的.

[40]

最著名的拓扑问题也许是四色地图定理.它最早是由茂比乌斯在 1840 年的一次讲演中提到的.这个定理是这样陈述的:没有一张球面或平面的地图,需要用多于四种的颜色来涂色,使得不同的国家彼此相区别.但如若两个国家相遇的只是一点(如美国的犹他州和新墨西哥州),则不认为它们是相邻接的.没有人能够画出一张需要五种颜色的地图,而所有试图证明这个定理的努力也都归于失败.作者常常收到一些四色定理的所谓"证明",但那深藏不露的有确实依据的数学证明,仍然有待于人们去发现.我们已经有了无需多于五种颜色的合乎要求的明确的证明,但只需四色的问题却依然遗留至今①!

现在让我们从近乎严格的数学,回到那引人注目的茂比乌斯带上来!这里读者可以看到一些真正有趣的东西.没有数学的大道理,只有一张大而柔韧的纸,一把苏格兰卷尺,一把剪刀,再就是一些耐性!

拿来一条如图 4-1 所构作的茂比乌斯带,并沿着带的正中

① 译者注:四色问题已于 1976 年 9 月由美国数学家阿佩尔和哈肯,在伊利诺斯大学的三台每秒运算 400 万次的 IBM 计算机上,运转 1200 小时,检验了全部可能的构形后,获得了肯定结论.数学界普遍认定,四色问题已经成为历史.即便如此,人类智慧依然呼唤着四色定理书面论证的诞生!

央剪开. 结果可能出乎你的意料. 剪出的是只有一半宽，但却是完整的一圈茂比乌斯带. 这并不意味着新的东西，只是让大家注重它所表现出不平凡的效果罢了. 另拿一条茂比乌斯带，像前面一样绕着它剪开，只是这一次是沿着与边缘距离三分之一宽的地方剪，剪的时候要绕两圈. 但当你回到原来的出发点时，你会发现带子分离成两个圈——两个不平常的圈. 假如你想知道，建议你动手做做！

给出一张纸带，扭转两次、三次或更多次，然后像前面一样把端头粘接起来，接着沿中线或三分之一线剪开，你会得到其他奇特的结果. 如果把原先形成的环圈第二次剪开，那么还会有更为复杂的情况发生.

[41]

如果我们把纸带的端头切开几条口子，然后把散开的端口按一定的方式连接起来，我们便能得到一系列变化多端且令人难以置信的效果. 例如，图 4-14 所示纸带的端头，已各切开两个口子. 直接连接端口 A 和 D. 接着让 B 绕过 A 的下方与 E 连接，又让 C 过 B 的上方和 A 的下方，再让 F 过 D 的上方和 E 的下方，而后连接端口 C 和 F. 如果此时你沿着两条切口绕着带子剪开，那么你将得到三个环的一种有趣的排列.

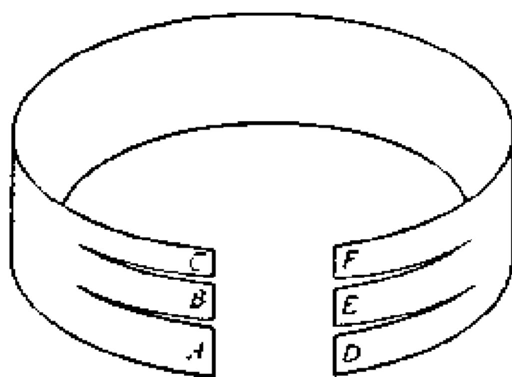


图 4-14

或者我们可以试一试，由史坦约恩(E. Stanyon)于 1930 年开发的一项成果. 还是由图 4-14 的条带开始. 将 E 翻转到正面

与 C 连接；将 F 翻转到正面与 B 连接；最后没有翻转，让 A 过 B 的下方与 D 连接．然后沿着两条切口绕着带子剪开，那么你就会看到究竟得到了什么！

此时，恐怕你的桌面上已经摆满了环和带．而此刻，恐怕你也已经注意到：剪一刀会得到两个环，剪两刀会得到三个环．如果你想要四个环，那就要剪三刀，等等．

布鲁克（M. Brooke）和玛达其（J. S. Madachy）发展了一种技巧，利用这种技巧能够产生出一条具有任何环数的链，而且只剪一刀！其秘诀在于：在割开端头切口和连接散开的端口之前，先将纸带沿纵长的方向折叠．从折叠纸带开始，然后将折叠的带子扭转 360°，而后再像图 4-15 那样连接端口．当我们绕着这两重厚的带子，纵向剪上一圈时，便会产生三个互相连锁着的环．

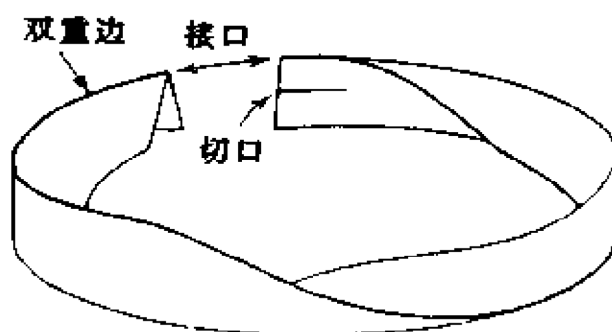


图 4-15

[42] 或者试着不把折叠的带扭转，而像图 4-16 那样切开端头，再像图 4-17 那样绕着两重厚的带子，沿长条切口剪开，我们也会得到三个环的链．

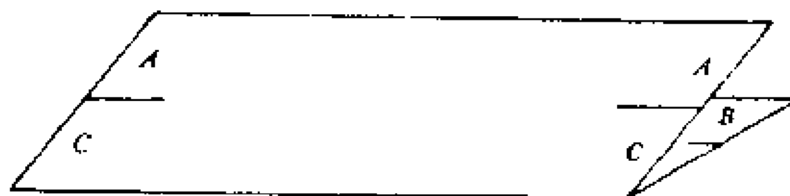


图 4-16

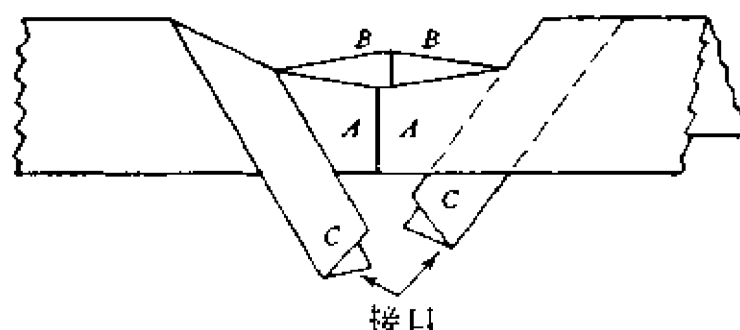


图 4-17

为了后面的工作，我们需要宽一点的纸带，为的是在折叠几重以后仍旧留有余地. 对于以下讲述到的五环链，所用的纸带至少需要 4 英寸宽，15 到 20 英寸长.

一个 5 环链，可以如图 4-18 用一张像手风琴那样可以折叠的纸带制作而成. 把端头切开口子，并作成一个圆圈，然后按下法连接两边的端口：C 与 C，D 与 D，E 与 E 直接连接，不跨越其他的端口或环；现在取 B 的一个端口，让它跨过环 C 和环 D 的下方，而与 B 的另一个端口相连接；接着取 A 的一个端口，跨过环 C、环 E 的下方，而与 A 的另一个端口相连接；最后沿带的中线剪开（通过全部折叠），你将得到一个 5 环链.

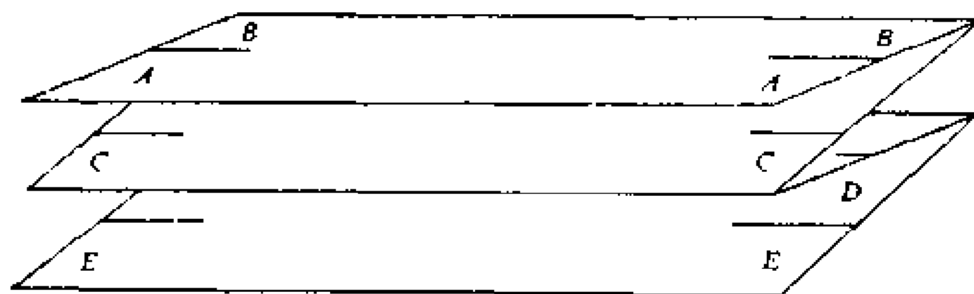


图 4-18

如果你研究了上面所表示的一般性技巧，那么你就会得出构造纸链的基本程序. 这里所说的纸链环数是任意给定的，而且在适当预备后可以一刀剪成.

在我们结束这次小小的游览之前，让我们做一个具有“博士水平剪纸”的9环链.我们需要一张8到10英寸宽，2英尺长的纸带.用一张报纸，或者为了增加强度而用一张大的杂志封面来制作，都是非常理想的.

[43]

准备一张像手风琴那样，折叠成七折的纸带.如图4-19，切开端头并按图中所示做记号.直接连接端口F与F、G与G、H与H，I与I，而不跨越其他的端口或环；接着，使E的一个端口，跨过环G和环I的下方，并与E的另一个端口相连接；使D的一个端口，跨过环F和环H的下方，而与D的另一个端口相连接；现在再使C的一个端口，跨过环G的下方，而与C的另一个端口相连接；然后使A的一个端口，跨过环G的上方及环C的下方，而与A的另一个端口相连接.

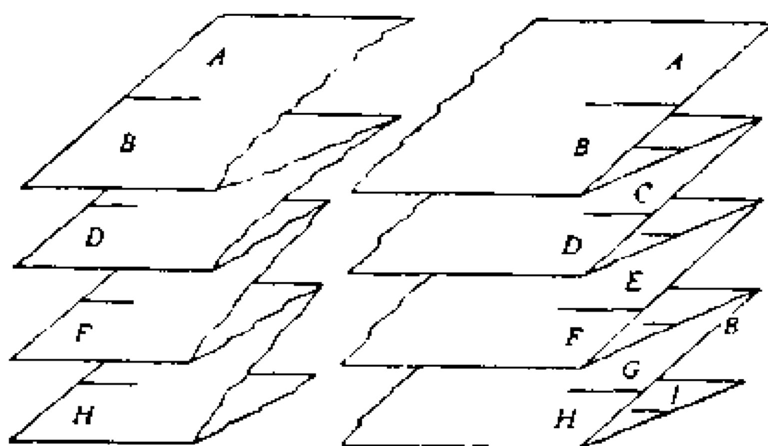


图 4-19

在上面的程序中，你会看到端口B依然游离着.如果我们沿中线剪开，那么带的一边将形成一个5环链脱落，而带的另一边将形成一个3环链脱落.带有端口B的长条也将散落.不过，我们将用带有端口B的长条，把一个5环链与一个3环链连接在一起.环A是5环链的一个边环，而环F则是3环链的一个边环.现在，如果我们把B的一个端口，跨过环A的下方、环D的上方、环F的下方，而后与B的另一个端口相连接，这样一

[44]

来，两个边环 A 和 F，就由环 B 连接起来，结果形成了一个灵巧而又令人惊异的九环链. 当然，这一切都要在绕着折成七层的纸带完全剪开后才能看得清楚. 九环链中的各环顺序依次是：H，D，F，B，A，C，G，E，I.

假如你没有遵循上述的正确做法，那么到头来可能会得出全然不同的东西. 事实上，许多令人惊奇的趣事，都是来自这种歪打正着，或者故意搞错的行为.

最后，我们给出一些在这一领域中供你娱乐的问题. 它们都可以用纸带，通过折叠、切割、连接和剪开的办法加以解决：

(1) 一个 4 环链.

(2) 两个分离的链：一个 2 环链，一个 3 环链.

(3) 在一个链中有三个单环，另有第四环从其他三环的中央穿过.

(4) 三个分离的 3 环链.

(5) 两个分离的链：一个 4 环链，一个 5 环链.

高深而复杂的拓扑学理论，与许多戏法和幻觉有着许多密切的联系. 后者则是魔术师或变戏法的人用以唤起观众神秘感的手法. 有幸的是，为了洞悉这类伎俩，我们无须了解很多理论上的概念！因此，这里我们想讲述几个简单的戏法，并用以结束本章. 这些戏法从表面看似乎不太可能，但从拓扑学角度观察，则变得完全有可能.

准备一枝铅笔和一根绳子，让它做成图 4-20 那样. 这里绳子的环圈一定要比铅笔短. 然后请你把铅笔穿过你朋友衣服的扣眼，要求要像图 4-21 那样，让绳子穿过自己的环孔. 当然，这里是不允许弄断或解开绳子的，更不能把绳子从铅笔上脱下来.

你说“不可能”吗？未必如此！它是可能做到的. 这只不过是拓扑学理论的一种应用.

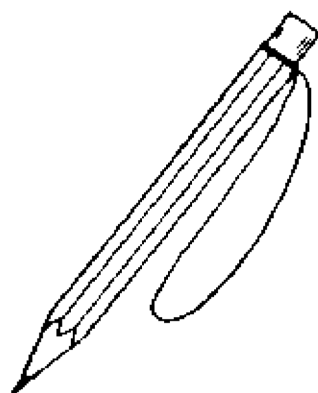


图 4-20

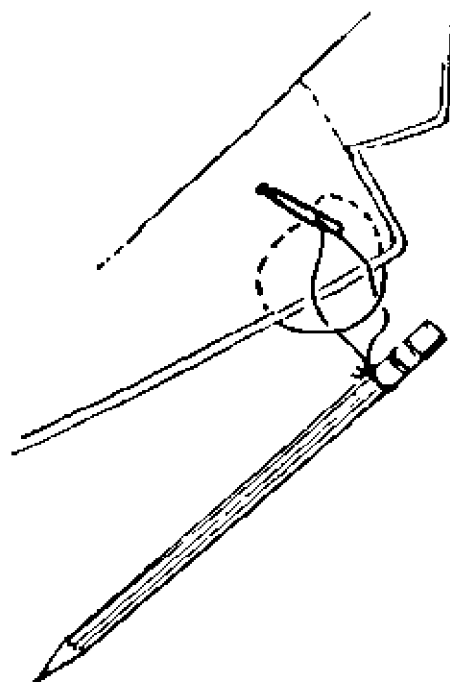


图 4-21

接下来讲的是一个晚会的戏法，只是戏法中的两个“受害者”可能会打破平静。这里需要两根粗实的绳子：一根绳子的两

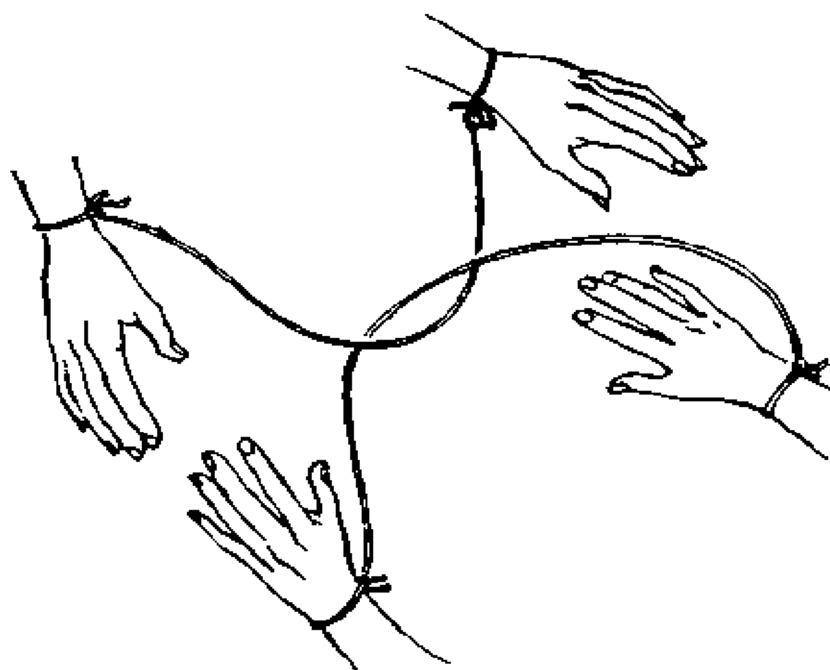


图 4-22

端，绑在一个“受害者”的两只手腕上；而另一根绳子的两端，则绑在另一个“受害者”的两只手腕上；而且两根绳子像图4 22看到的那样，互相锁着．现在你请他们在不切断和解开绳子，也不让绑着的地方脱出手腕的前提下，使两人分离开．如果这两人选择得当，那么他们毫无结果的努力，将会引起与会者极大的欢乐．这是拓扑学理论在“实际”应用上的又一个例子！

拓扑学远不只是戏法的一种来源．例如茂比乌斯带，一种基于理论的技巧，导致了在工业上一种非常有价值的应用．也有这样的情况，一个初期的戏法，导致了拓扑理论的真正提高，甚至触发了数学和其他科学分支的重大发展．

在第7章，当讲述与物体变形相关联的其他重要性质时，我们还会简要地返回到与之有关的拓扑学内容．同时，我们希望，这次拓扑领域的短暂游历，不会给你留下令你怀疑的东西． [47]

第5章 一些推理问题

许多推理问题——逻辑问题——能够非常巧妙地应用基本的布尔(Boole)代数的方法加以解决，而后者则是数理逻辑的基础. 这里我们对它给出了最低限度、而又最为简要的概述，希望它能激励读者，对这门严谨的数学领地，予以更加深刻的钻研、探究. 事实上在这类严肃的数学中已非常难得触及到娱乐方面的应用.

我们采用这样的约定：某事为“真”，则其值为1；某事为“假”，则其值为0(即零). 对“某事”则用代码记号，这样，基于已知的事实，我们常能形成一些表达式或等式. 而这些表达式或等式在大多数情况下，可以像在通常代数中那样对待. 一个非常简单的例子，将显示这些思想是怎样地被应用.

假设我们有两份关于同一个男孩名字的互相矛盾的报告书，我们知道每一份的报告书中都含有一个错误. 其中一份写为“杰克·狄波”，另一份则写为“约翰·狄波”.

很明显，如果“狄波”是名字，那么他的姓既不是杰克，也不是约翰. 下面让我们看一看，怎样用布尔代数来处理这件事.

我们只有两个数值0和1. 没有什么东西比“真”更真实：所以在工作过程中，如果我们得到比“1”更大的数，我们可以把它就当成“1”.

设 A 代表杰克，B 代表约翰，C 代表狄波. 则每份报告书都能用两种方式加以描述：

乘法——若 A 与 C 两者都等 1(即真的),则其积 $AC=1$.但如果 A 或者 C 中有一个值为 0(即假的),则 $AC=0$.

加法——若 A 或 C(或两者)值为 1(即真的),则 $A+C=1$.

现在,从两份报告书中知:$A+C=1$,又 $B+C=1$.

于是
$$(A+C)(B+C)=1,$$
由此
$$AB+AC+BC+C^2=1.$$

但已知每份报告书中都含有一个错误,所以 $AC=0$,$BC=0$.明显地 $AB=0$,这样我们就只剩下 $C^2=1$,即 $C=1$.这告诉了我们,男孩的名字叫狄波是正确的. [48]

当然,上面例子本身是无关紧要的,我们对它详加论述只是为了弄清所包含的原理.下面我们将运用这些原理,去解决一个稍微有点复杂的问题:

> "这是一则杰克·布伦特来达拉斯结婚的消息."萨姆看着广告议论说,"那应该是乔的儿子,同样的名字,而且他 21 岁."
>
> 柯雯摇了摇头."大概这会儿你忘了,亲爱的,"她告诉她的丈夫,"他的儿子是吉姆,现在才 18 岁."
>
> 安恩从来没见过布伦特,但他听到过大量有关他们的事."他的名字自然不是杰克",她告诉她母亲说,"无论如何他现在至少 25 岁."
>
> 当然,他们三人说的都有错,不是这种错,便是那种错;但他们每人也都作出了一项正确的陈述,或年龄,或名字.

为了找出乔的儿子的年龄和他真实的名字,我们采用以下代码:

杰克 $=a$	年龄 18 岁 $=d$
吉姆 $=b$	年龄 21 岁 $=e$
不是杰克 $=c$	年龄 25 岁 $=f$

则萨姆说的便是"ae",柯雯说的便是"bd",而安恩说的则是"cf".由于他们每人对乔的儿子的年龄和名字都作出了一个真的和一个假的陈述,于是我们有:

$$ae = bd = cf = 0$$

且 $a + e = 1, b + d = 1, c + f = 1.$

此外我们必有:$ab = ac = de = df = ef = 0.$

于是 $(a + e)(b + d) = 1$,由此 $ab + ad + be + de = 1$,去掉零值的项,我们有: $ad + be = 1.$

由此 $(c + f)(ad + be) = 1.$

于是 $acd + bce + adf + bef = 1.$

再次去掉零值的项,结果留下 $bce = 1$,这暗示:

$$b = 1, c = 1, e = 1.$$

于是,乔的儿子名叫吉姆,今年 21 岁.

[49] 许多难以解决的推理问题,运用布尔代数却很方便.那些原理用于解一些初看起来似乎十分复杂的问题,是非常有益的.以下"同名的人和物"问题,典型地包含了这种思路.

例如,有四个人:奥尔顿先生、巴德先生、科布先生和迪尔先生,他们住在(未必对应)四个地点:奥尔顿、巴德、科布和迪尔.

错杂的出现,似乎起于以下的原因.例如,我们说"巴德先生的家住在迪尔",这里城镇名称"迪尔",与迪尔先生同名.不过,这类项目可以十分简单地用符号表示出来.

我们用 A_c 表示这样的概念:"奥尔顿先生住在科尔".类似地用 B_a 表示"巴德先生住在奥尔顿",等等.总之,用大写字母 A、B、C、D 代表人,用小写字母代表地点.对某个非特指的地点和人,我们则用 x 和 X 表示.例如,我们写 $B_xX_d = 1$,换成话来说就是:"巴德先生住在 x 地,且 X 先生住在迪尔"这件事是真的.

在上述方法中，可以把介入的未知数按问题的需要去替换. 这样得出的数目，要超过字母可能排列的总数. 在前例中，B_xX_d 共有四项，其中有三项值为零，一项值为 1. 而在我们的工作中，可能会有许多单独的项在视线上消失，因为它们由于明显的关系被排除.

以下是一道完整的问题，它给出了鲜明的思路：

> 奥尔顿先生、巴德先生、科布先生和迪尔先生住在奥尔顿、巴德、科布和迪尔. 但他们四人都不住在与自己同名的城镇里. 迪尔不是奥尔顿先生住的城镇. 巴德先生的住所位于以某人名字命名的城镇，而这个人的住所又在以另一个人名字命名的城镇里，而后者则是住在科布. 问迪尔先生住在哪里?

用大写字母 A、B、C、D 表示人的名字，下标小写字母表示城镇. 我们有：

$$A_a = 0,\ B_b = 0,\ C_c = 0,\ D_d = 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

$$A_d = 0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

存在一个 X 及一个 Y，使得 $B_xX_yY_c = 1$. ……………… (3)

现在，我们把等式(3)对全体的 X 和 Y 求和，并由等式(1)直接消去应排除的项得： [50]

$$B_aA_bB_c + B_aA_dD_c + B_cC_aA_c + B_cC_bB_c + B_cC_dD_c + B_dD_aA_c + B_dD_bB_c = 1.$$

很明显，$B_aA_bB_c$，$B_cC_aA_c$，$B_cC_dD_c$，$B_dD_bB_c$ 全部为 0，由等式(2)又得 $B_aA_dD_c = 0$.

于是这里只剩下 $B_cC_bB_c + B_dD_aA_c = 1$. 但 $B_cC_bB_c$ 暗示 A_a 或 A_d，后者均为 0，因而 $B_cC_bB_c = 0$. 这样我们就只留下 $B_dD_aA_c = 1$. 由此我们得出结论：巴德先生住在迪尔，迪尔先生住在奥尔顿，奥尔顿先生住在科布，而科布先生自然住在巴德. [51]

第6章　丢番图方程及诸如此类

这一切可能早在丢番图(Diophantos)之前几个世纪就已开始了，然而他却是对这种类型问题进行广泛研究的第一位数学家．今天，我们把这些问题和方程，跟他的名字联系在一起．

丢番图，在他那个时代，是希腊最著名的数学家，约生活于公元3世纪．关于他的一生人们知之甚少，只知道他大约在公元250年左右在亚历山大里亚至少住过几年．作为遗物，他为后世的数学家留下了许多书籍和文献，其中大部都已散失，只有少数得以保存下来．它们都包含于他那六、七本《算术》丛刊中，内容全是有关整数和分数的性质．

丢番图所研究的一个典型的问题是这样的：

> 找出两个整数，使得它们的积，加上它们中任一数的平方，其结果仍为整数的平方．

这一问题的详细解法，将在本章稍后加以论述．这里引用它只是作为例子．这一例子需要我们去求解一种方程，我们称之为丢番图方程．

所有由丢番图提出的问题，都不像是他独创的．似乎那是搜集自某些更早的资料，甚至于比丢番图早上1000年的古巴比伦史料．然而，我们对此前这些问题的进展，却没有任何东西可以奉告．

丢番图创始的问题，按现在的说法，给出的只是一种“特殊解”．也就是给出了一组或几组数，使它满足一个特定的问题．然

而，他用于解这些问题及相应方程所采用的方法，却要比那个时代总体的数学水平超前若干世纪. 而正是这些方法，为拓展成我们今天所知道的一般性解法铺平了道路. 稍后我们还会看到，一个问题或方程的一般性解法，包容了所有的特殊解. [52]

现在我们来考虑这种方程的处理，先从最简单的开始. 必须强调指出，我们将要给出的几乎全是整数或有理数解，后者是一种含有整数分子和分母的分数.

考虑与直角三角形相联系的毕达哥拉斯(Pythagoras)方程[①]：

$$X^2 + Y^2 = Z^2,$$

这里 X，Y 和 Z 必须是整数.

上述方程有无限多组整数解. 例如 $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ 或$(5, 12, 13)$或$(8, 15, 17)$或$(6, 8, 10)$，都是一些特殊解. 然而，我们要找的是对于 X, Y, Z 的表达式，这种表达式必须包容所有的整数解.

令 $X = kx$, $Y = ky$, $Z = kz$，这里 x, y, z 是整数，而 k 则是 X, Y 和 Z 最大的整数公因子.

则，$x^2 + y^2 = z^2$，且 x, y, z 没有比 1 更大的公因子.

现令 $z + x = m$, $z - x = n$，其中 m, n 是整数.

则，$z = \dfrac{m+n}{2}$, $x = \dfrac{m-n}{2}$，且 $y^2 = mn$.

我们可将满足 $y^2 = mn$ 的整数 m, n 写为：

$m = rp^2$, $n = rq^2$，这里 p, q, r 是整数.

把 m, n 的值代入前面的式子，我们有：

---

① 译者注：关于直角三角形直角边长与斜边长关系的定理，通称勾股定理. 我国是世界上最早发现勾股定理的国家. 早在公元前 1100 年，我国人民就已掌握"勾三、股四、弦五"的规律，这一成果比毕达哥拉斯要早上几百年.

$$z=\frac{r(p^2+q^2)}{2},\ x=\frac{r(p^2-q^2)}{2},\ y=pqr.$$

在方程 $x^2+y^2=z^2$ 中，对 x、y，z 乘以同样的数是不会影响其有效性的，读者只要对 $(x, y, z)=(3, 4, 5)$ 的情形验证一下就会明白！

把上面得到的关于 x，y，z 的式子各乘以 2，得：

$$x=r(p^2-q^2),\ y=2pqr,\ z=r(p^2+q^2).$$

[53] 但由原先规定，1 是 x，y，z 的最大整公因子，因此在以上三个表达式中必须有 $r=1$，结果：

$$x=p^2-q^2,\ y=2pq,\ z=p^2+q^2.$$

因此，$X=(p^2-q^2)k$，$Y=2pqk$，$Z=(p^2+q^2)k$ 就是所求的一般性解. 对 p、q，k 的任何指定值，我们都将获得原方程的一组整数解. 而无数特解中的任一个，也都能通过适当选择 p、q 和 k 而得到.

在所求的一般性解答中，我们规定 k 是最大的整公因子. 尽管没有正式的证明，但是很明显，在 X，Y，Z 的最终表达式里，在某些情况下 k 可能是分数：例如，当 p 和 q 两者都是奇整数时，就可能会有 $k=\frac{1}{2}$，或 $\frac{3}{2}$，或 $\frac{5}{2}$ 等等.

现在我们可以着手求解先前引用过的那个最简单的丢番图问题：即找两个整数，使得它们的积，加上它们中任一数的平方，其结果仍为整数的平方.

这个问题能够表达如下：

$$\left.\begin{aligned}x^2+xy=A^2\\ y^2+xy=B^2\end{aligned}\right\}\ \text{这里 } x, y, A, B \text{ 是整数.}$$

由此，$x(x+y)=A^2$，且 $y(x+y)=B^2$.

想一想就会知道，我们必须表示

$$x+y=u^2x=v^2y，\text{这里 } u，v \text{ 是整数}.$$

则
$$\frac{x}{y}=\frac{v^2}{u^2},$$

满足它的 x、y 为：$x=v^2k$，$y=u^2k$，k 是某个整数，并由此

$$x+y=(u^2+v^2)k.$$

代入原方程，我们得到

$$v^2k^2(u^2+v^2)=A^2，\quad u^2k^2(u^2+v^2)=B^2，$$

于是 u^2+v^2 必须是一个平方数，令 $u^2+v^2=w^2$.

最后一个方程的一般解，我们已经找到，给出如下：

$$u=(a^2-b^2)t，v=2abt，w=(a^2+b^2)t.$$

[54]

于是，我们可以把 u，v 的值代入规定的 $x=v^2k$，$y=u^2k$ 之中，并由此得：

$$x=4a^2b^2t^2k，\quad y-(a^2-b^2)^2t^2k.$$

但 t 和 k 是上式的公因子，所以不失一般性和有效性，可令 $t^2k=s$，这里 s 可以是任意的公因子.

这样一来，最后的一般性解变为：

$$x=4a^2b^2s，\quad y=(a^2-b^2)^2s.$$

当我们解这样一个方程的时候，要出现个把错误简直是太容易了！由于这个原因，我们需要经常进行核对. 在复杂的情况下，对求解过程各不同阶段的中间结果进行核验，往往是明智的.

核查的办法，可以把所得的 x，y 表达式直接代入. 就像你小心翼翼地做一个代数练习那样. 但对于一组特别的值，哪怕是一次核验也是很有用的. 尽管它不能对全部值的正确性作最终的论定.

令 $a = 5$，$b = 2$，$s = 3$，则 $x = 1200$，$y = 1323$，这时有：

$$1200^2 + 1200 \cdot 1323 = 1200 \cdot 2523 = 1740^2,$$

和
$$1323^2 + 1200 \cdot 1323 = 1323 \cdot 2523 = 1827^2.$$

在许多包含丢番图方程的问题里，我们可以求出满足方程的最小整数解. 让我们看看在上例情况下是怎么进行的.

如果 $b = 0$，我们将得出 $x = 0$. 显然，一个零的值，是不能被看作合理的结果被接受的. 于是，对于我们的"最小解"，必须取 $a = 2$，$b = 1$. 这将导致 $x = 16s$，$y = 9s$. 因为 16 和 9 没有比 1 大的公因子，所以我们的"最小解"在 $s = 1$ 时给出，此时 $x = 16$，$y = 9$.

考虑原先的方程，我们看到 x 和 y 是可以交换的. 于是，我们希望找到这样的 a，b 和 s 的值，使它能体现出这种交换的结果.

置 a 和 b 等于两个奇数，则 $a + b$ 与 $a - b$ 两者是 2 的倍数，于是 a^2 b^2 是 4 的倍数. 在我们的解中，"参数常数"s 能够是一个分数，在这种情况下它明显地可为 $\frac{1}{4}$.

于是，在 $a = 3$，$b = 1$，$s = \frac{1}{4}$ 时，我们有 $x = 9$，$y =$ [55] 16.

我们用 $(x, y) = (16, 9)$ 表示以上方程的最小解，这是 $x = 16$，$y = 9$ 的一种简短写法，其间 x 和 y 是可交换的.

现在转到毕达哥拉斯方程的一个延续上来. 我们只陈述它的解答，而不打算说明它是怎样得到的.

假定我们有方程 $X^2 + eY^2 + fZ^2 = W^2$，这里 e 和 f 是任意的整系数，可以是正的，也可以是负的.

这一方程最简单的一般性解答是：

$$\left.\begin{aligned} X &= \pm (a^2 - eb^2 - fc^2)k \\ Y &= 2abk \\ Z &= 2ack \\ W &= \pm (a^2 + eb^2 + fc^2)k \end{aligned}\right\}$$ 这里 a，b、c 是整数，k 是任意的公因子.

在上述解中，注意到 X^2 保持正值，所以 X 可正可负. 而类似地 Y^2，Z^2，W^2 也不受符号改变的影响. 在许多实际场合，我们关心的仅仅是 X，Y，Z 和 W 的正值；但这样一来，如果 a，b，c 使得 $a^2 < eb^2 + fc^2$ 的话，那么在 X 的表达式中，前面就必须限制使用"—"号.

例如，我们令 $X^2 + 2Y^2 - 3Z^2 = W^2$. 则其最简的一般性解为：

$$\begin{aligned} X &= \pm (a^2 - 2b^2 + 3c^2)k, \\ Y &= \pm 2abk, \\ Z &= \pm 2ack, \\ W &= \pm (a^2 + 2b^2 - 3c^2)k. \end{aligned}$$

设 $a = 2$，$b = 2$，$c = 1$，$k = 1$，可得一个特殊的正整数解

$$X = 1,\ Y = 8,\ Z = 4,\ W = 9.$$

我们在前面给出的方程和它的一般性解答，对于解许多更为复杂的丢番图方程极为有用. 下面我们将会看到这方面应用的例子.

假如我们要求方程 $x^2 + 2y^2 = z^2$ 的正整数解. 与方程 $X^2 + eY^2 + fZ^2 = W^2$ 相比较，可以看出这里有 $e = 2$，$f = 0$. 于是所求的解变为

$$\begin{aligned} x &= (a^2 - 2b^2)k, \\ y &= 2abk, \\ z &= (a^2 + 2b^2)k. \end{aligned}$$

[56]

一个较为困难的例子，是解以下一道小巧玲珑的问题：

“比尔、伯特和鲍勃是兄弟，他们之中没有孪生的. 不计各人年龄的零头月份，比尔和伯特年龄的平方和，等于鲍勃年龄平方的五倍. 试问鲍勃青春几何？”

令三人的岁数为 X，Y 和 Z，这里 Z 是鲍勃的年龄. 于是我们有 $X^2 + Y^2 = 5Z^2$. 注意到那里没有孪生的关系，一眼就能看出有解 $X = 11$，$Y = 2$，$Z = 5$. 下面让我们排除乏味的尝试，以及因大数而可能出现的差错，而探求理论上的解.

题中方程可写为 $X^2 + Y^2 - (2Z)^2 = Z^2$.

在先前的一般性解中，我们省略去（而不是忘了）“参数常数”，那么该方程为以下所满足：

$$X = a^2 - b^2 + c^2,$$

$$Y = 2ab,$$

$$Z = ac = a^2 + b^2 - c^2.$$

则
$$c^2 + ac - a^2 = b^2,$$
于是
$$4c^2 + 4ac - 4a^2 = 4b^2,$$
也就是说 $(2c + a)^2 - 5a^2 = (2b)^2$，而它又为以下所满足：

$$\left.\begin{aligned} 2c + a &= m^2 + 5n^2 \\ 2b &= m^2 - 5n^2 \\ a &= 2mn \end{aligned}\right\} \text{这里省略去一个参数常数.}$$

于是我们有：

$$2c = m^2 - 2mn + 5n^2,\ 2a = 4mn,\ 2b = m^2 - 5n^2.$$

在这样一个解里，我们对每个表达式乘以或除以同样的数，是不会影响其有效性的. 于是我们又可重写如下：

$$a = 4mn,\ b = m^2 - 5n^2,\ c = m^2 - 2mn + 5n^2.$$

把这些 a、b、c 值代入 X，Y，Z 并化简，可得：

$$X = 4mn(10mn - m^2 - 5n^2),$$

$$Y = 4mn(2m^2 - 10n^2),$$

$$Z = 4mn(m^2 - 2mn + 5n^2).$$

最初我们曾经省略过一个参数常数.现在我们又看到了三个表达式的一个公共因子 $4mn$.如果我们把这个公因子拿走,并在它的位置上换上一个完全独立的参数常数"k",自然不会影响解的有效性.而三个表达式的任一个或全部乘以"-1",也同样不会影响解的有效性.应用上述想法,最终一般性解变成: [57]

$$X = \pm(m^2 - 10mn + 5n^2)k,$$
$$Y = \pm 2(m^2 - 5n^2)k,$$
$$Z = \pm(m^2 - 2mn + 5n^2)k.$$

设 $m = 2$, $n = 1$, $k = 1$,我们有正值 $X = 11$, $Y = 2$, $Z = 5$.于是鲍勃最年轻的岁数是5岁.

另一类丢番图方程,提供了一种非同寻常的处理的例子.假定我们有:

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y = A^2 \\ y^2 + x = B^2 \end{array}\right\}$$ 这里 x, y, A, B 必须是非零的有理数,而未必是整数.

我们置 $A = x - m$, $B = y - n$,这里 m 和 n 必须是有理数,而未必是整数.则

$$x^2 + y = x^2 - 2mx + m^2, \text{且 } y^2 + x = y^2 - 2ny + n^2,$$

于是 $$y = m^2 - 2mx, \text{且 } x = n^2 - 2ny.$$

联立 $$\left.\begin{array}{l} 2mx + y = m^2 \\ x + 2ny = n^2 \end{array}\right\}$$

即 $$\left.\begin{array}{l} 4mnx + 2ny = 2m^2n \\ x + 2ny = n^2 \end{array}\right\}$$

由此，$x=\frac{n(2m^2-n)}{4mn-1}$，且类似地 $y=\frac{m(2n^2-m)}{4mn-1}$，这就是得到的对于 x 和 y 的一般性解.

这个解答出现了一些值得我们考虑的要点.

首先，使人注意的是，它仅在 $m=-1$，$n=-1$ 对 x，y 才有整数解 $x=-1$，$y=-1$，但这时使得 $A=B=0$. 能够证明，对所有其他非零的解，x，y 两者都是分数（只是正式的证明稍微有点超出了这里的范围）. 例如，$x=y=\frac{1}{3}$ 便是一组可以接受的解.

其次，如果我们要求 x，y 两者必须是正的，那么 m 和 n 就要选得使 $2m^2>n$ 且 $2n^2>m$. 联立这些条件得出：

[58]

$$2n^2>m>\sqrt{\frac{n}{2}}.$$

对任意选定的 n 值，上式变为确定 m 取值范围这样一件简单的事. 例如，当 $n=2$ 时有 $8>m>1$. 而 x，y 的取值还取决于在该范围内 m 值的选定. 如由 $m=3$，$n=2$，可得：

$$x=\frac{32}{23},\ y=\frac{15}{23},\ A=\frac{37}{23},\ B=\frac{31}{23}.$$

在介绍丢番图方程时，我们不能不提到（哪怕是简要地）佩尔（Pell）方程. 这是一种特殊类型的丢番图方程，它以第一个专门对其留意的数学家佩尔命名. 佩尔方程最简单的形式是：

$$x^2-2y^2=1.$$

它有无数组的整数解. 这些解的数值，依次如下表：

$x=1$	3	17	99	577	等等，
$y=0$	2	12	70	408	等等.

注意到在上述解答序列中，从第一个非零解开始，在相继数

组的 x、y 值之间，存在着关系：

$17 = 6 \cdot 3 - 1$，$99 = 6 \cdot 17 - 3$，$577 = 6 \cdot 99 - 17$，等等，
$12 = 6 \cdot 2 - 1$，$70 = 6 \cdot 12 - 2$，$408 = 6 \cdot 70 - 12$，等等.

我们还要注意的是，$x = 3$ 是第一组非零解中的 x 值，而上面的 $6 = 3 \times 2$.

接下来我们再看方程 $x^2 - 3y^2 = 1$，其整数解值依次为：

$$x = 1 \quad 2 \quad 7 \quad 26 \quad 97 \quad \text{等等},$$
$$y = 0 \quad 1 \quad 4 \quad 15 \quad 56 \quad \text{等等}.$$

这里我们有：

$7 = 4 \cdot 2 - 1$，$26 = 4 \cdot 7 - 2$，$97 = 4 \cdot 26 - 7$，等等，
$4 = 4 \cdot 1 - 0$，$15 = 4 \cdot 4 - 1$，$56 = 4 \cdot 15 - 4$，等等.

在这一情况下，$x = 2$ 是第一组非零解中的 x 值，且这里的 $4 = 2 \times 2$.

继续这种探讨过程，下一个出现的是 $x^2 - 4y^2 = 1$. 但这就是 $x^2 - (2y)^2 = 1$，它没有非零解. 类似地，对于 $x^2 - 9y^2 = 1$，$x^2 - 16y^2 = 1$ 等情况，也没有非零解. 可以不予考虑！ [59]

于是，需要考虑的下一个方程是 $x^2 - 5y^2 = 1$，其整数解的数值依次为：

$$x = 1 \quad 9 \quad 161 \quad 2489 \quad \text{等等},$$
$$y = 0 \quad 4 \quad 72 \quad 1292 \quad \text{等等}.$$

这里我们有：

$161 = 18 \cdot 9 - 1$，$2489 = 18 \cdot 161 - 9$，等等，
$72 = 18 \cdot 4 - 0$，$1292 = 18 \cdot 72 - 4$，等等.

在这一情况下，$x = 9$ 是第一组非零解中的 x 值，且这里的 $18 = 9 \times 2$.

再继续这样的过程，无疑只会浪费时间！事实上，能够证明：在一般性的佩尔方程 $x^2 - Ny^2 = 1$ 中（N 是平方数除外），其整数解依次的数值，在第一组非零解之后，服从以下确定的法则：

$$\left.\begin{aligned} x_n &= 2ax_{n-1} - x_{n-2} \\ y_n &= 2ay_{n-1} - y_{n-2} \end{aligned}\right\} \text{这里 } x = a \text{ 是在第一组非零解中的 } x \text{ 值.}$$

这是一条极为重要和有用的法则，它使我们有可能依次写下这类方程解的数值. 实际上第一组非零解立即就能找到，有一种专门的方法可以计算出第一组非零解. 但在多数情况下，用试验的方法去求它，似乎更快也更实际些：如依次尝试 y 的值，直至产生一个 x 的整数值为止.

附带说及，在许多课本里，为了获得所求的解，曾给出一个远为复杂而且难以施行的方法. 对此，这里不予介绍似乎更好！

上面我们考虑的是形如 $x^2 - Ny^2 = 1$ 的佩尔方程的一般解. 我们说过，对每一个 N 的可能值（N 是平方数除外），它都有无数组的整数解.

下面我们继而审视一些更为一般形式的方程 $x^2 - Ny^2 = e$，这里 e 是一些除 1 以外正的或负的整数，且 N 不是平方数. [60] 其中包含一种特殊的情况 $x^2 - Ny^2 = -1$.

这里并不意味着对所有的 N 和 e，方程都有整数解. 事实上，对任一特定的 e 值，整数解只对于一定的 N 值才存在，反过来也一样.

例如，$e = -1$，便有 $x^2 - Ny^2 = -1$，仅当 $N = 2$，或 5，或 10，或 13，或 17 等才有整数解. 若 $N = 3$，则也仅当 $e = 1$，或 -2，或 -3，或 4，或 6，或 -8 等才有整数解. 关于确定 N 和 e 的值相协调这一理论问题，非常复杂. 不过，实践上只要对 y 的有限值依次加以核验，就能发现是否有整数解的存在.

让我们假定，对特定的 N 和 e 的值，我们已经确定了方程 $x^2 - Ny^2 = e$ 的一组整数解. 又假定该整数解包含着 x，y 的最

小正值 $x=a$、$y=b$. 又设 $x=m$、$y=n$ 是方程 $x^2-Ny^2=1$ 的任一解，这里的 N 与先前那个方程有同样的给定值. 由此，$x^2-Ny^2=e=a^2-Nb^2$，且 $m^2-Nn^2=1$. 于是

$$\begin{aligned}x^2-Ny^2&=(a^2-Nb^2)(m^2-Nn^2)\\&=a^2m^2+N^2b^2n^2-Na^2n^2-Nb^2m^2\\&=a^2m^2\pm 2Nabmn+N^2b^2n^2-Na^2n^2\\&\quad\mp 2Nabmn-Nb^2m^2\\&=(am\pm Nbn)^2-N(an\pm bm)^2.\end{aligned}$$

现在我们可以令

$$x=am\pm Nbn,\ y=an\pm bm,$$

注意以上符号(即+或−)必须取同样的. 把 m 和 n 换成满足方程 $x^2-Ny^2=1$ 的任一数组，我们都将获得原方程 $x^2-Ny^2=e$ 的解.

从一个例子可以清楚地看出这一点. 假定我们有 $x^2-3y^2=-11$，它最小的正整数解是 $x=1$，$y=2$. 由此所求的解为 $x=m\pm 6n$，$y=n\pm 2m$. 但是，想到 $(-x)^2=(+x)^2$，$(-y)^2=(+y)^2$，于是我们可以把解写为更加“整齐”的形式：

$$\left.\begin{aligned}x&=\pm(m\pm 6n)\\y&=\pm(2m\pm n)\end{aligned}\right\}\ \text{这里 } m \text{ 和 } n \text{ 是整数，使得 } m^2-3n^2=1.$$

我们可以对 m 和 n 的值，依次列表；并如上述，写下相应的 x，y 值：

[61]

$m=$	1	2	2	7	7	26	26	等等，
$n=$	0	1	1	4	4	15	15	等等，
$x=$	1	4	8	17	31	64	116	等等，
$y=$	2	3	5	10	18	37	67	等等.

对更多的 m、n 相继值，上表给出了 x、y 所有可能的整数解. 特别地，对于方程 $x^2 - 3y^2 = -11$，给出了全部的整数解.

也有这样的可能，对一个这种类型的方程，上述程序并不给出全部的整数解. 此时我们需要对程序作适当的变更. 今以实例加以说明.

假定我们希望求出方程 $x^2 - 2y^2 = 119$，当 x 小于 200 时的整数解.

通过快速试验，我们可以找到上述方程的最小解 $x = 11$，$y = 1$. 根据前面讲的程序，我们能够写出一般形式的整数解：

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm(11m \pm 2n) \\ y &= \pm(m \pm 11n) \end{aligned}\right\} \text{这里 } m^2 - 2n^2 = 1.$$

由 m、n 的依次值，我们得出：

$$\begin{aligned} x &= 11 \quad 29 \quad 37 \quad 163 \\ y &= \ \ 1 \quad 19 \quad 25 \quad 115 \end{aligned}$$

事实上，在 x 的限制范围内我们还有别的解. 不过，无论是否还有解，核查总是需要的，而且核查的办法也不十分困难.

我们由原方程的最小解 $x = 11$，$y = 1$，得到了关于 x，y 值的一张表. 假如还有其他解的话，那么它一定是完全独立于我们从最小解得到的解答. 而且这些"别的"解中的最小者，其 x，y 值必须位于前表所示的最小解与次小解之间：在上例中，位于 $x = 11$，$y = 1$ 与 $x = 29$，$y = 19$ 之间.

于是，可以对此进行核查，即在原先方程中，依次检验 y 的从 2 到 18 的值. 这项工作看起来似乎相当艰难，其实可以进行得很快，而且没有过多的计算.

[62]

依此，对于方程 $x^2 - 2y^2 = 119$，我们很快便能找到一个新解 $x = 13$，$y = 5$.

现在我们可以基于 $x = 13$，$y = 5$，对 x，y 的第二系列值列表. 这些 x，y 值与先前系列的 x，y 值，都遵从一样的原则：

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\ (13m \pm 10n) \\ y &= \pm\ (5m \pm 13n) \end{aligned}\right\} \text{这里 } m^2 - 2n^2 = 1.$$

由 m, n 的依次值，我们得出：

$$x = 13 \quad 19 \quad 59 \quad 101.$$
$$y = \ \ 5 \quad 11 \quad 41 \quad 71.$$

上述过程可予重复，说不定还有解的第三个系列(或解族).它独立于已经得到的两个系列.如果这第三系列存在的话，那么它的最小者的 x, y 值，必位于第二系列的最小解与次小解之间.于是，我们依次检验 y 从 6 到 10 的值，要是真的找到了一组解，那么基于这组解，就能得到解的第三个系列.

事实上，对于 $x^2 - 2y^2 = 119$ 的第三个解族是不存在的.于是，我们能够列出一张完整的表，它显示了两个各不相同的解"族"，如下：

$x=$	11			29	37			163
$y=$	1			19	25			115
$x=$		13	19			59	101	
$y=$		5	11			41	71	

注意到 119 是两个素数 7 和 17 的积，那么这个例子为一条有用的规则提供了示范.这条规则告诉我们，对于方程 $x^2 - 2y^2 = 119$，为什么只能有两个而不是更多的各不相同的解族.下面是这一规则的简要陈述：

在方程 $x^2 - Ny^2 = e$ 中，这里 N 不是平方数，且 e 和 N 没有公因子.如果 e 是 m 个奇素数的积(e 没有平方或更高方次的因子)，则它至多有 2^{m-1} 个解族，或没有整数解.

注意：如果 e 是 N 的倍数，则方程并非处于最原始的形式.此时可假定 $e = fN$，又这时 x 也必为 N 的倍数，令 $x = zN$.代入这些值，我们得到一个新的方程 $y^2 - Nz^2 = -f$.由于 f 有 [63]

比 e 更少的素因子，所以上述规则要用于对 f 的因子，而非对 e 的因子. 至于 e 和 N 有公因子的情况（e 不是 N 的倍数），则更为复杂，它已经超出了我们要说的范围.

例如方程 $x^2 - 11y^2 = 9805$ 有四个各不相同的解族，因为 9805 是 5，37 和 53 的积. 读者可以求一求上述方程 y 小于 250 的所有的正整数解，并以此检验自己对上述知识掌握的程度.

要是 e 是偶数，或因子中含有平方或更高的次方，则情况变得相当复杂，在这里讨论它无疑是困难的. 但总的原则依然可用，直至找到我们关注的解族.

与解佩尔方程有关的实际方面，我们考虑多讲几句. 这种方程起于许多娱乐问题，因而很少包含"困难"的数. 前面提供的简短评述，只是为了让大家在需要的时候，对它们的解法有所了解. 同时必须强调指出，这种评述并不意味着全面综合. 实际上有着许多单独论述佩尔方程的鸿篇巨作！

总的来说，本章只是覆盖了丢番图方程领域的很小一部分. 然而，我们希望它能在这种方程的要义和解答方面，给大家一个小小的见识. 虽然在这里我们不可能阐述更多的例子，但读者还[64] 是可以在本书稍后解某些问题时找到它们.

第7章 杂　　集

字典对“杂集”(potpourri)这个词，是当成没有关系的项目的集合来解说的，而这用以形容本章所包含的内容真是恰到好处. 可能有些项目已经含于本书的其他章节里，但这里我们还是要选出一些足以使人感兴趣的内容，专门来说.

几何剖分

这里提供的是娱乐数学众多通俗消遣内容中的一种. 当我们解一个剖分问题时，可能用到的只是很少的数学知识，更多需要的是：直觉的启示，对错误的尝试，以及耐心的检验. 后面这些，通常要比用数学理论更加成功.

剖分问题的共同形式是：把一个几何图形，通过切割和拼合，变换为另一个图形，同时要求切割的块数要最少，且重新组合后要构成新的图形. 可以证明，任何多边形，即使是不规则的，也能够切割为有限块，并拼合成任何指定的具有同样面积的多边形.

本章稍后，我们将讨论另一些类型的剖分. 但这里先从一些典型的几何剖分开始. 即如何把一个纵长十字，变换成其他多种的几何图形. 这些是林德格林(H. Lindgren)的工作，他相信自己所得的解都具有最少的块数！虽然没有证明，但此后的情形使这种陈述变得更为坚定.

三张图，图 7-1，7-2，7-3，通过图解表现了林德格林的两种

操作剖分的办法.

一个纵长十字能够用"条带"的办法,变换为黄金矩形(其长与宽的比为($\sqrt{5}+1$):2).

首先,纵长十字本身可以作简单剖分,而许多这样的剖分可以像图7-1中间实线部分那样,拼组成带有平行边的条带.其次,把黄金矩形一个个边对边地连成图7-1中间虚线所示的条带.现在把一个条带放在另一个条带的上方(把后者画在透明纸上是合适的),并多方位地转动,直至上面条带的两个边缘分别过下面条带的叠合点(即条带上位置对等的点).不断地尝试一定能够得出满意的结果.这时我们就将得到一个具有最少块数的剖分.

[65]

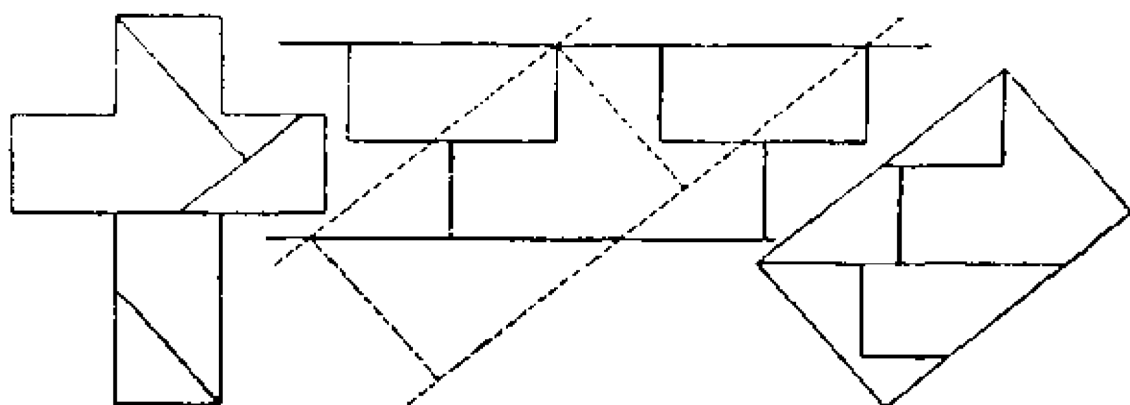


图 7-1

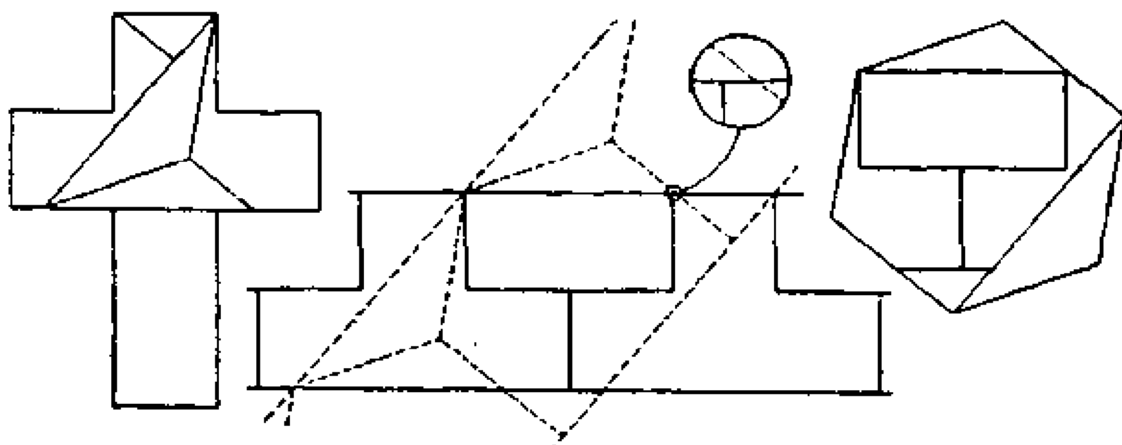


图 7-2

[66]

图 7-2 所示的把纵长十字变换为正六角形的剖分，也用了条带的技巧.

一种更加令人迷惑的方法，表现在由纵长十字变换为正十二边形的剖分中. 正十二边形能够像图 7-3A 那样剖分，并形成一种花样，这种花样可以在共同的平面上重复，演成一种"镶嵌花纹"的图案. 纵长十字也能形成图 7-3A 右边所示的花样图案. 而上述两种花样图案之间必须有一组叠合的点，它们已用打圆的点直接画在图上. 图 7-3B 展示了作为剖分结果的、两种花样叠放在一起的情景.

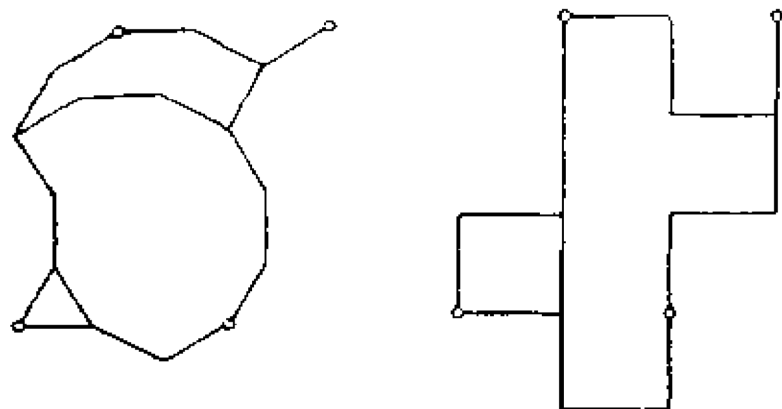


图 7-3A

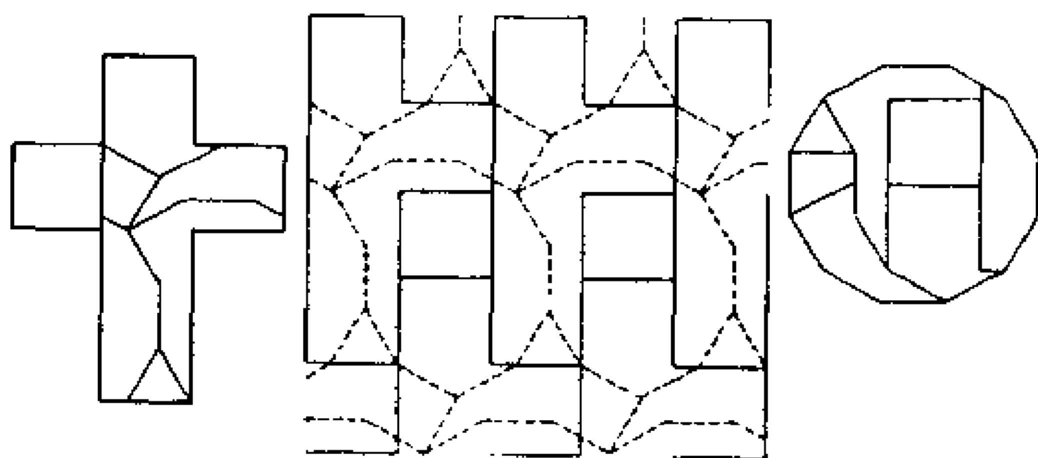


图 7-3B

夹心面包定理

一个明显的事实是：任何一条线段都只有一个中点，它把线段分为两半.

一个不那么明显的事实是：只有一条直线同时平分两条空间线段(它们间相互不在另一条上). 证明颇为简单：每条线段都只有一个平分它的点，而连接两个中点的直线必平分两者.

过空间任意三点，都能放上一段圆弧(直线则考虑为半径无限大的圆). 于是一个类似的议题表现为：存在一条圆弧，同时平分任意的三条空间线段(它们间任意两条都相互不在另一条上).

[67]

接下来的陈述又是什么呢?“在平面上任何两块面积都能用一条直线同时平分”!

在图 7-4 中，我们有两个矩形和一条过它们中心点的直线，这条直线明显地平分两个矩形.



图 7-4

图 7-5 展示了两个完全不规则的形状，和一条假设平分两者面积的直线. 现在我们证明这样的一条直线是存在的.

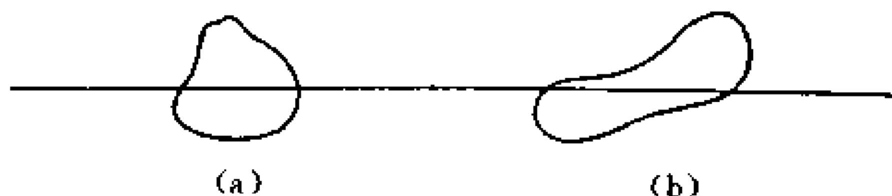


图 7-5

分别地考虑两个形状的每一个. 能够表明，它们中的每一

个，都能被无数条直线所平分. 想象在同一平面上这样的一些直线，它们与一任定的参照直线倾斜成 θ 角. 见图 7-6. 让这些与 XY 成倾角 θ 的直线扫过形状 A. 很清楚，其中必有一个位置的直线平分该形状的面积. 也就是说，在无数条平分形状 A 面积的直线中，总有一条它的倾角的值为 θ.

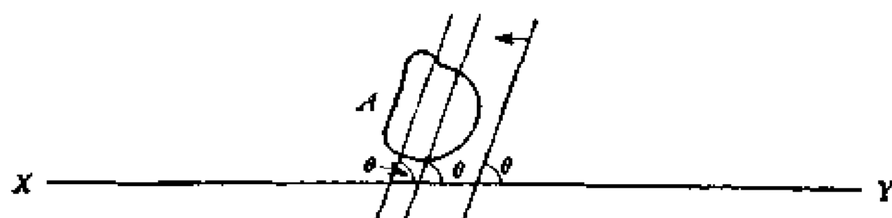


图 7-6

完全类似的考虑可以用于形状 B. 于是，由于 θ 的变化，[68] 在无数平分形状 A 的面积的直线，与无数平分形状 B 面积的直线中，必有一条是相同的，这就是同时平分两者面积的直线.

把上述想法延伸到三维，能够证明：空间任意的三个立体，能够被某个平面同时平分. 证明虽说超出了本书的范围，但该定理却有着一个有趣的实际应用：在两片面包（一片褐色，一片白色）之间夹一片火腿，这确是很平常的事. 但我们至少有一种办法，通过干净利落的一刀，把火腿及各种颜色的面包，都切成相等（体积）的部分！遗憾的是，上述定理没有暗示我们应该怎样去切.

这里有两则以食物为题的小问题，它与等分问题相关联，其答案可于第 142 页找到：

(1) 两个人平分一块饼，要求只切一刀，怎样才能做到使每人都完全感到满意，认为自己确实得到了该分的一半？

(2) 艾哈迈德、克麦尔和阿里三人要平分一袋葡萄干，怎样分才能做到公平，使得每人都感到满意. 这里要求不用任何量具或称重设备？

立方体构造

在《娱乐数学杂志》中曾提出过一个立方体构造的问题[1]：

"把一张 1×3 矩形的纸，切为完全相等的两块，使得把它折起并接合时(没有任何重叠)，构成一个完美的立方体."

这道题当时人们曾以为只有如图 7-7 两种解答，这里虚线指示折痕.



[69]

图 7-7

但后来倍克(C. L. Baker)发现了如图 7-8 所示的两种更特殊的直切型的解.

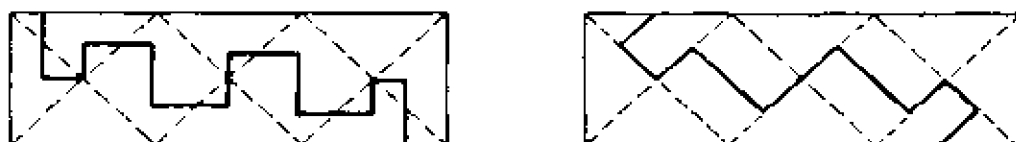


图 7-8

而且接着倍克又发现了这个问题的无数种解答. 在图 7-9 中，我们由画一条连接 A，B 点的任意曲线开始，然后把该曲线绕 B 点旋转 90°，得到一条连接 B 点和 C 点的曲线. 然后再把后一曲线绕 C 点旋转 180°，得到一条连接 C 点和 D 点的曲线. 又进一步绕 D 点，把整条由 A 到 D 的曲线旋转 180°，得到一条连接 D 点和 E 点的曲线. 小心翼翼地沿着这条由 A 到 E 的完全弯曲的曲线切开，并沿着图中虚线所提供的标记折起，那么当这两块连接在一起时，将构成一个立方体.

① 原注：《娱乐数学杂志》No. 7，1962 年 2 月，第 24 页.

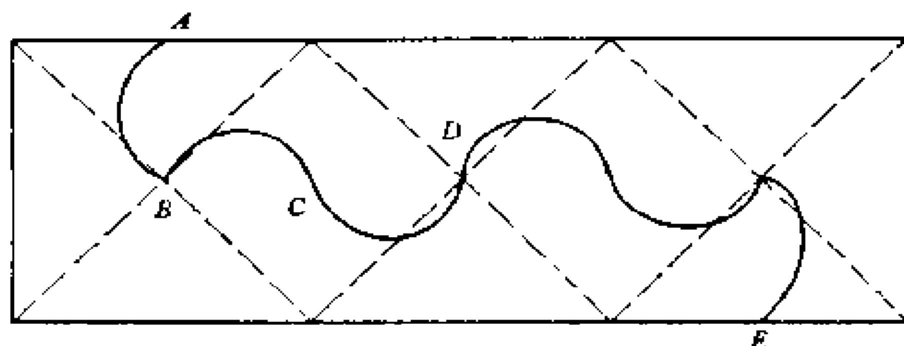


图 7-9

在上述巧妙的制作过程中，需要加以限制的是：必须避免曲线的"自交"。因为这样势必导致多于两块的结果。当然，该曲线还应包含在矩形纸张的范围之内。

在拓扑中的一点

我们准确地沿着想象的直线拉伸一条短橡皮绳，那么它实质上只是形成一条线段。这里，处于拉伸状态下的绳子，整条地把未拉伸状态下的绳子包含于其内部。

我们能不能断言，不管原先绳子变形与否，上述情况都至少有一个不动点？换句话说，我们能否证明，在绳子上至少有一个点，它在拉伸前与拉伸后恰好处于同样的位置？ [70]

在图 7-10 中，我们用一条长的和一条短的平行线段，描述绳子拉伸与未拉伸两种状态。每个未拉伸绳子上的点，在拉伸后的绳子上都有一个相应的点。连接这样一对点的直线已在图上画出。可以想象，在上述直线中至少有一条直线，垂直于两条表示绳子状态的线段。而这条垂线段所连接的，是两个表现同一个点的点，它便是不动点。

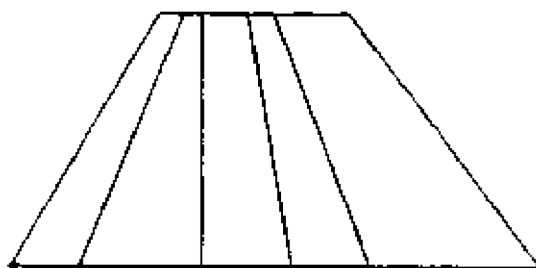


图 7-10

值得提起的是，没有两条连接对应点的直线可能相交。因为

这样一种相交，暗示着绳子上的两个点，可以沿绳子伸长的方向交换联系的走向. 这对于任何的纵长拉伸的情况，都是明显地不可能的.

能否在二维平面上也应用同样的原则呢？假定我们有一个橡皮圆盘 A（见图 7-11），在它所在的平面上绷拉成形状 B. 这时的状态是整个 A 置于 B 之内. 那么是否至少有一个点在这种绷拉中保持静止呢？

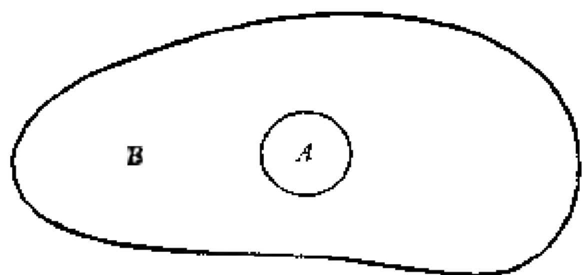


图 7-11

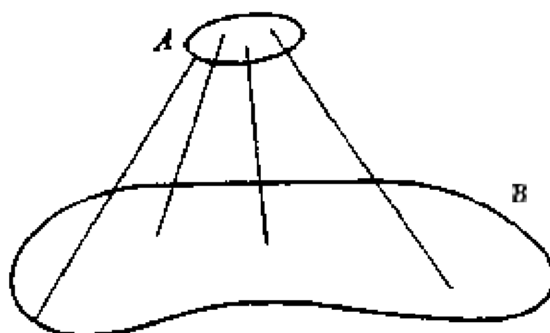


图 7-12

在图 7-12 中，我们置形状 A 与形状 B 于两个互相平行的平面，并用以描述圆盘在绷拉前与绷拉后两种状态. 如同在绳子拉伸情况中那样，这里在两种描述的形状之间，存在着点与点的一一对应. 这已在图 7-12 中表明. 很清楚，连接 A，B 间对应点的直线中，必有一条直线垂直于两个形状所在的平面. 而这条垂线段所连接的，是两个表现同一个点的点，它便是不动点.

[71]

上述概念用于三维情况，大约也不会太令人意外. 事实上，这种概念还可以在理论上应用于 n 维空间. 即从 n 维空间的一个物体，扩展为另一个 n 维空间的物体. 例如，一块海绵能够扩张到充满整个房间. 那么在这块海绵中，一定有一个点在扩张前后保持不变，即不动点. 该点在房间中的位置，恰好就是原先它在海绵中的位置.

雷米欧司定理

"如果一个三角形的两条内角平分线相等，则该三角形等腰."

雷米欧司(Lehmus)于1840年向斯坦纳(J. Steiner)提出了这个定理. 此后，它便成为许多数学论文和研讨的主题. 该命题的陈述简洁漂亮，但却很难证明它的真实性[1]. 有些证明花费了很大篇幅，而另一些证明却仅列出一些要点. 我们这里给出的证明，是出自J·A·H·亨特，它是目前我们已知的证明中最短的一种，而且此前尚未发表过.

在三角形 ABC 中，$\angle A$ 和 $\angle B$ 的内角平分线分别交 BC 和 AC 于 Q 和 R 点. 我们必须证明：如果 $AQ = BR$，则三角形等腰.

证明：

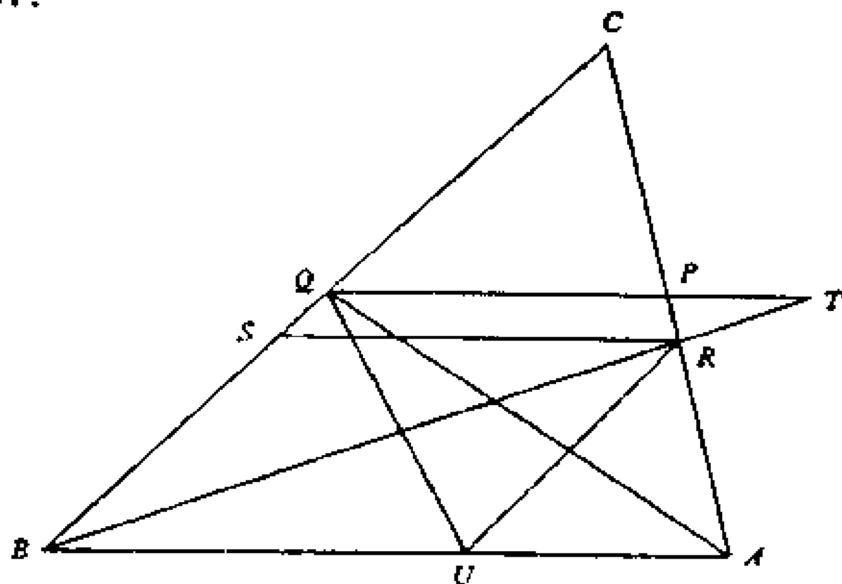


图 7 13

① 译者注：事情似乎是这样的，德国数学家雷米欧司在一次数学会议上说了以下的话："几何问题在还没有证出之前很难说它是困难还是容易！"为此，他举出了这道题作为例子. 当时该问题还没有被证出来. 后来另一名德国数学家斯坦纳证出了它，但相当繁杂. 本书之所以在这里提及这个问题，其主要原因，据猜测是由于作者之一亨特，于本世纪60年代找到了书中所提的极简单的证法.

先画一个明显不等腰的三角形 ABC（图 7-13），满足 $\angle BAC > \angle ABC$. 并画出角平分线 AQ 和 BR. 再画 PQ 和 RS 平行于 AB，又画 QU 平行于 CA. 令 BR 和 QP 延长交于 T 点.

判断上述结构图形. 我们先证明：如果 P 在 R“之上”，则必须有 $\angle BAC > \angle ABC$.

$QU = PA = PQ$（因 AQ 是$\angle BAC$ 的平分线），但 $PQ < TQ$，又 $TQ = QB$（因 BR 是$\angle ABC$ 的平分线）. 于是，$\angle QUB > \angle QBU$，由此 $\angle BAC > \angle ABC$. 上述判断是基于把 P 画在 R“之上”.

现因 $PQ < RS$，于是

$$PA < BS. \qquad \cdots\cdots (1)$$

又，$AQ = BR$ 是我们的基本假定，且我们有 $\angle SBR < \angle PAQ$，于是在以上基本假定下有

[72]

$$BS < PA. \qquad \cdots\cdots (2)$$

不等式(1)和(2)是矛盾的，因此三角形 ABC 不能是不等腰的. 从而它必须是等腰的.

选出特定的排列

6 件不同的东西，按一定顺序排列，共有 720 种方式；7 件不同的东西则有 5040 种方式. 更准确地，我们说 6 件不同东西的排列数为 720；7 件不同东西的排列数为 5040；一般地，n 件不同东西的排列数为“n 阶乘”，写为 $n!$，这里：

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots \cdot 2 \cdot 1.$$

例如，$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

一个叫科纽克(D. Kozniuk)的中学生，把我们的注意力吸引到一个与排列相关的非常有趣的要点上，其思路就是在本节所要讲述的.

求 8！的值，可以说是一件很简单的事．对于 1 到 8 这 8 个数字，我们能找到 40320 种的排法．只要我们有必要的时间和足够的耐心，我们便能按数的大小顺序，列出所有排法的清单：

12345678，12345687，12345768，12345786，……

然而，在上表依序所列的数中，我们要确切识别出，比如第 20117 种排法，则需要花费大量的时间．

有幸的是，我们找到了快速识别任一特定排列的方法，只需较少的计算，而不必汇集出长长的表． [73]

在讨论所述方法之前，必须澄清一个与阶乘有关的事实．大家都清楚，$3!=6$，$2!=2$，$1!=1$，但 $0!=1$ 却未必那么明显．这是能够证明的，但正确的证明超出了本书的范围．虽然没有正规的证明，但从以下几个类似的操作，也能使人想到"零阶乘"确实等于 1．

$$3!=\frac{4!}{4}=\frac{24}{4}=6,$$

$$2!=\frac{3!}{3}=\frac{6}{3}=2,$$

$$1!=\frac{2!}{2}=\frac{2}{2}=1,$$

$$0!=\frac{1!}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

假定我们希望在一张由数字 1 到 7 的 5040 种排列所组成的完整的表中，找出第 2238 种排法．这里，表中的排列是按数由小到大的顺序排放的(即由 1234567，1234576，1234657 等开始的)．

首先，我们把 2238 剖分为小于 7 的阶乘的倍数(包含 0！)：

$$2238=3\cdot 6!+0\cdot 5!+3\cdot 4!+0\cdot 3!+2\cdot 2!+1\cdot 1!+1\cdot 0!.$$

在上述剖分中，我们示范了至关重要的一点．当取到 $3\cdot720+0\cdot120+3\cdot24$ 时，总计已达 2232，这时还有余数 6．我们把该余数剖分为 $2\cdot2!+1\cdot1!+1\cdot0!$，然而我们知道 $3!=6$，这意味着在剖分的过程中可能有多于一种的剖分方法．那么究竟要采用哪一种剖分方法呢？我们说，要“用”尽可能多的较小数的阶乘(非零倍的)．类似地，如果在另一种情况下，我们得到的余数为 5，那么剖分的方法应该是 $2\cdot2!+0\cdot1!+1\cdot0!$，而不是 $2\cdot2!+1\cdot1!+0\cdot0!$．

现在我们来谈在 2238 剖分中几个阶乘的系数．我们依次写[74]下它们的“序数”，这种序数每个都比它对应的系数大1，只是最后一个序数要准确地与 $0!$ 的系数相等：

第 4，第 1，第 4，第 1，第 3，第 2，第 1．

我们通过以下的程序识别第 2238 种排法的数字．其间，运作的方法是明显的：

在上升顺序中保留的数字	序数(第)	所求的数字
1 2 3 4 5 6 7	4	4
1 2 3 5 6 7	1	1
2 3 5 6 7	4	6
2 3 5 7	1	2
3 5 7	3	7
3 5	2	5
3	1	3

这样，我们就找到了相应于第 2238 种排法的数字，它是 4162753．

上述结果可以通过以下方法简单地验核．一张完整的，从 1234567 至 7654321 由小到大的排法表，共包含 5040 个数．而这第 2238 个数，在一张从 7654321 至 1234567 顺序颠倒过来的表中，位于第 2803 个数．

$$2803=3\cdot720+5\cdot120+1\cdot24+3\cdot6$$

$$+0\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 1.$$

于是，我们有对应于系数的"序数"依次为：

第4，第6，第2，第4，第1，第1，第1.

接着准确地遵循同样的方法，但此时保留数字按下降的顺序（7654321），可以求出，第2803个数（在颠倒的排法表中）是4162753，它与正常求法相吻合.

一个相当大的数

有一种通俗的数学游戏，要求用规定的数、规则的算术符号和记号，构造一个数的表达式.

用数字1，2，3，4各一，与小数点、减号、括号一起，能够表达出一个出奇大的整数. [75]

我们有 $N = 3^{(.2)^{-(.1)^{-4}}}$[1] $\doteq 3^n$，这里的 n 有将近6990个数字.

而描写数 N 的位数的数，其本身也大约有3000个数字. 错！

与 N 的值相比较，整个可见的宇宙空间，其体积的立方英寸数，是一个几乎可以忽略的量！ [76]

$$3^{(.2)^{-(.1)^{-4}}} = 3^{5^{10000}}$$

$$5^{10000} = 10^{\log 5^{10000}} \doteq 10^{6989.7}$$ 即有6990位.

而 $3^{5^{10000}} \doteq 10^{10^{6989.7}\cdot\log 3}$ 即有 $0.477\times 10^{6989.7}$ 位

而该数亦有6990或6989位.

① 译者注：按西方国家数学书的习惯，小数点前的零常可省去不写，例如".2"即表示0.2.

2001.2.24

第 8 章　带有形状的娱乐

对数学证明的探索，有时会误入一条完全绝望的道路. 著名的地图四色定理说的是，要对平面或球面的一张地图着色，只要用不多于四种的颜色就足够了. 没有一个人能够设计出一张必须用五种颜色的地图. 但这并不是只需四种就够了的证明. 而恰恰是这样一个问题：要么给出一张需要五种颜色的地图，要么给出一个只需不多于四种颜色的可靠证明，它的解决，困扰了数学家们几个世纪[①].

然而，有些问题看起来要比真实情况可怕得多！

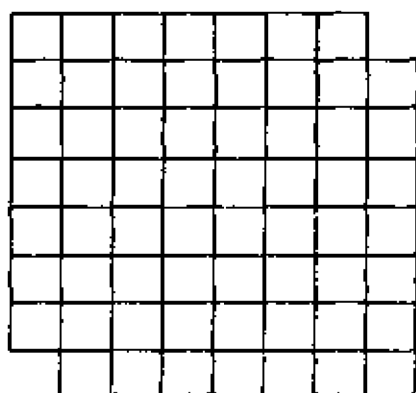


图　8-1

图 8-1 所示的是一幅 8 × 8 方格阵列，只是它已从两个对角各取去一个小格. 你能用 31 张多米诺牌去覆盖这留下来的 62 个方格吗？已知每个多米诺牌恰好能覆盖两个方格. 从表面上看这似乎是可能的，但这类的尝试全然失败了！然而，成千上万次的失败，并不表明这种覆盖的不可能性. 因而真正的问题在于：必须证明，用 31 张多米诺牌覆盖 62 个这样的方格，究竟是可能，还是不可能.

---

① 译者注：关于四色问题，详见第 48 页注释.

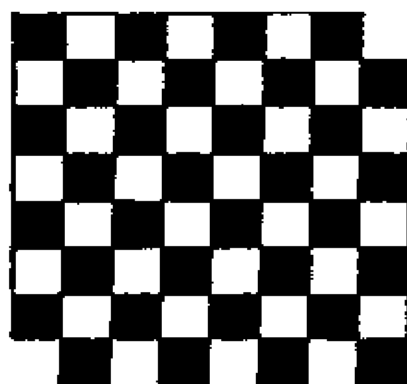


图　8-2

如果我们把方格像图 8-2 那样上色，我们就会得到一个规则的国际象棋盘那样的图案，其中缺去了两个角. 这两个角要么同着白色，要么同着黑色. 在图 8-2 中，它们是白色的. 这样，留下的有 32 个黑格，30 个白格. 但一张多米诺牌必定覆盖一个白的和一个黑的方格，于是 31 张多米诺牌便覆盖每种颜色各 31 个方格. 由于我们只有 30 个白的方格，所以 31 张多米诺牌是不能覆盖题中要求的 62 个方格的.

有一些与三维多米诺牌相关联的问题. 这里有一个 3 × 3 × 3 的立方体结构，它含有 27 个立方块. 而每张三维多米诺牌都含一黑一白的立方块. 现在我们要从这个结构的 27 个立方块中拿走一个，而让留下的 26 个立方块，换成 13 张的三维多米诺牌. 明摆着的问题是：要使这种替换成为可能，这 27 个立方块中，哪一个可以拿走？哪一个不可以拿走？

以上问题的解答其实十分简单. 只要我们对结构中的立方块，像图 8-3 那样交替上色，中央的立方块保持白色. 这样，我们就有 14 个黑色立方块和 13 个白色立方块. 而 13 张三维的多米诺牌，包含 13 个黑色的和 13 个白色的立方块，于是，我们必须从结构中拿走一个黑色的立方块，以使留下的13个黑的和13

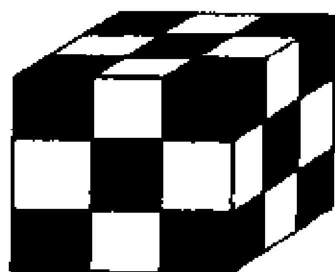


图　8-3



图　8-4

个白的立方块，相应于 13 张多米诺牌. 至于拿走哪一个黑色的立方块无关紧要！倘若我们把一个白色的立方块拿走，留下 14 个黑的和 12 个白的立方块，那么要用 13 张多米诺牌替换，则是完全不可能做到的.

另一个小问题的提出，也跟以上 27 个立方块相关. 假定它们是木制的. 一只白蚂蚁从外表的某个立方块的中心开始蛀洞，从一个立方块的中心，蛀到另外一个立方块的中心. 试问，这只白蚁能否蛀过所有的立方块，而最终到达正中央的立方块呢?这里只允许蛀过面与面相连接的立方块，而不允许沿对角的方向穿蛀，更不允许进入同一个立方块多于一次. 如果你认为可能，请指出一条可行的路线；如果你认为不可能，那就请你证明这一点. 不过，交替着色将为解答这道谜题提供一个思路. [78]

图 8-5 所示的是一张直三米诺，图 8-6 则是一张单米诺. 单独用直三米诺牌显然是不能覆盖一张 8×8 象棋盘的，因为 64 不是 3 的倍数. 但用 21 个直三米诺和 1 个单米诺牌，能否覆盖 8×8 的棋盘呢?

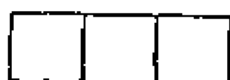
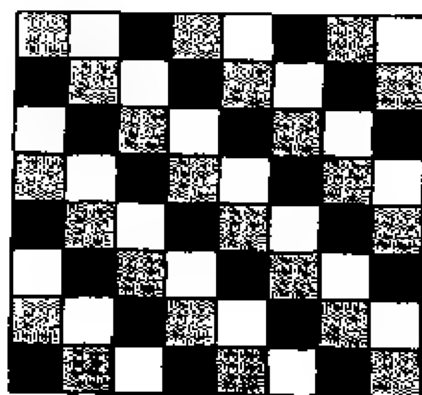

图 8-5


图 8-6


图 8-7

要回答这个问题，我们必须像图 8-7 那样，用黑、白和阴影三种颜色给棋盘上色. 这里我们有 22 个阴影，21 个黑色和 21 个白色. 而 21 张三米诺牌的每一张，都覆盖了 1 个阴影，1 个黑色和 1 个白色的方格. 这样，一种成功的解答就依赖于单米诺牌

摆放的位置.因此,我们要考虑在各种各样的摆法中,这张单米诺要放在哪里才有用.

如果该单米诺放在左下角,则它在图中显示为黑色.这样一来留下的是22个阴影,21个白色,20个黑色的方格,这显然不能为21个直三米诺所覆盖,因为各种颜色的方格数不一致.现在我们转到棋盘的其他三个角,由于它们都能改着为黑色.因此根据对称性原理,把单米诺牌放在棋盘的任一角落,其余部分用直三米诺无法覆盖.

如果单米诺牌放在图8-7的任何一个白的或黑的方格,那么色格数的不一致,将排除用直三米诺覆盖剩余方格的可能性.反复应用对称原理得知,在另一半棋盘与白格、黑格对称的所有方格,同样不能用以放置单米诺牌. [79]

在图8-7的22个阴影格中,只有4个是与白格或黑格不对称的,有如图8-8所示.

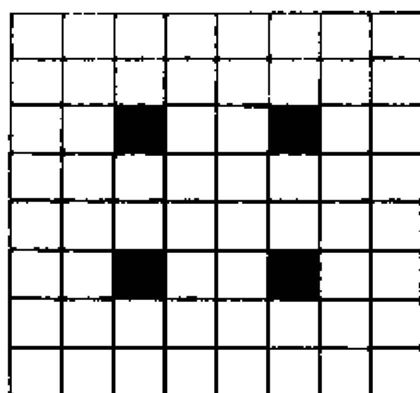


图 8-8

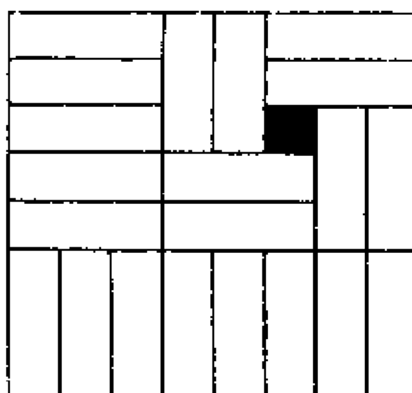


图 8-9

现在,如果我们把单米诺牌放在上述四个格子中的任何一个上,那么留在棋盘上的格子,就能够用直三米诺牌覆盖.图8-9所示的排列,便是一种符合要求的解答.

许多问题包含形状,着色图解往往会使问题变得更为简单,这在前面两种情形的讨论中已经显示出来.本章稍后,我们还将发现更进一步的例子.我们已经接触过单米诺、多米诺和三米诺

牌.我们还将引出一些更为复杂的形状,那是由许多方格沿边与边连接而构成的一般性的多阶米诺的种类.

图 8-10 所示的是该米诺家族的头九个成员.对它们及由它们联合而成的众多形状的研究,已发展成一门极为通俗和有趣的娱乐数学分支.

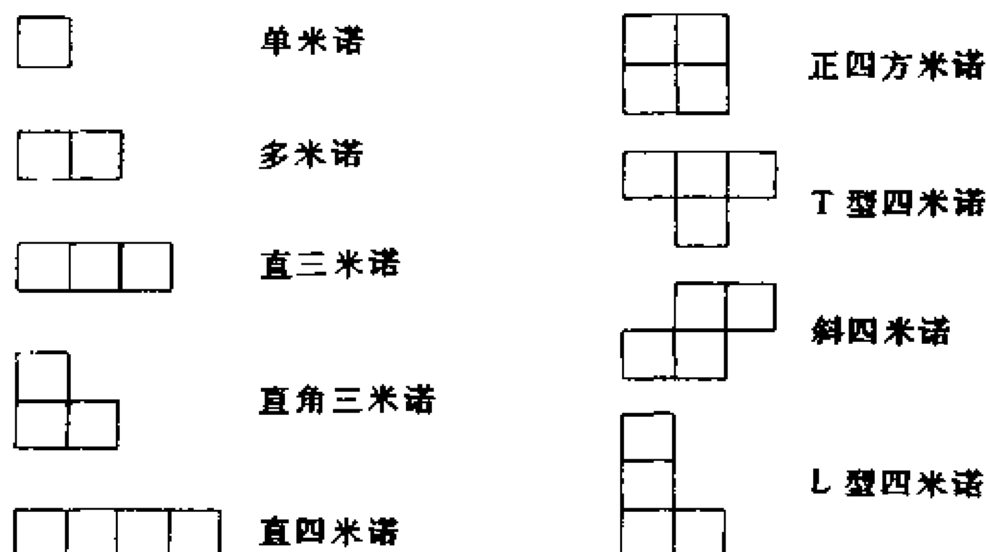


图 8-10

这里只有两种不同类型的三米诺,直三米诺和直角三米诺;而也只有五种类型的四米诺.单独使用它们也只能扩展出少许不同的图形.图 8-11 所示的是一套五米诺牌,共有 12 种.

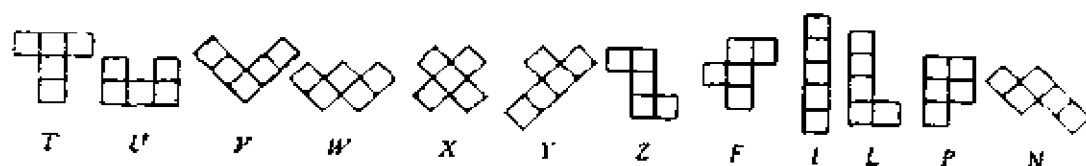


图 8-11

六米诺有 35 种,七米诺有 108 种.随着形状中米诺数的增加,不同类型的数量也将迅速增加.十米诺(由 10 个方格组成的多阶米诺牌)有 4466 种.但五米诺由于仅有 12 种不同类型,尤为便捷.事实上,它已变得比其他米诺牌更为通用.的确,许多制

[80]

造商投放于市场的拼版游戏，都是基于五米诺的巧妙操作.

在图 8-11 中，我们为每个不同的五米诺形状，给出一个不同的字母，它能够对所提到的五米诺在记忆上提供帮助. 此外，把这些字母分为两组：*TUVWXYZ* 和 *FILPN*，也有益于进一步强化记忆. 这里，前者是字母表的最后七个字母，后者则集中出现于"菲律宾人"(Filipino)一词之中.

与五米诺有关的令人喜爱的趣题不可胜数. 下面是几个例子：

(1) 把 12 种不同类型的五米诺，排成两个 5×6 的矩形. 图 8-12 所示的是仅有的一个已知的解答(除了由 *F* 和 *N* 型五米诺组成的阴影区域能够重组且覆盖同样的区域以外).

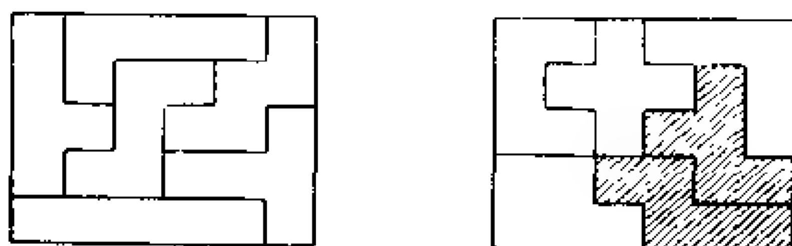


图 8-12

[81]

(2) 把 12 种不同类型的五米诺分为三组，每组四个，然后找出一个 20 方格的区域，使得它能为每一个不同的组所覆盖. 直至 1961 年，人们对此仅知少数几种解答. 图 8-13 所示的是其中的一种. 图 8-14 是哈布顿(Jack Halliburton)发现的另一种解. 这一特殊的问题在《娱乐数学杂志》上提出后，竟然鼓起了一股研究五米诺图的巨大热情，以至于没过几个月，就有 115 种的解答被发现. 图 8-15 和图 8-16 所示的便是其中的两种.

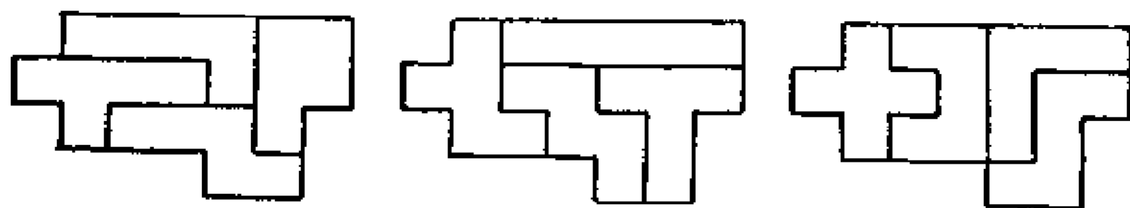


图 8-13

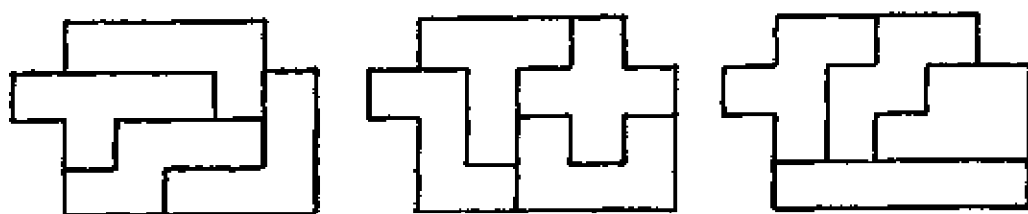


图 8-14

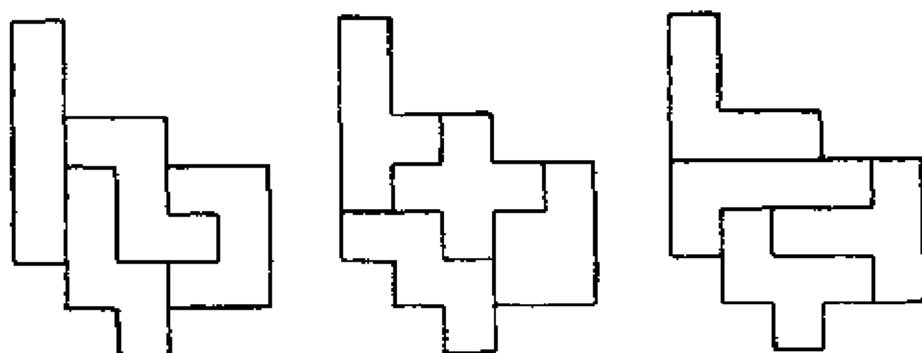


图 8-15

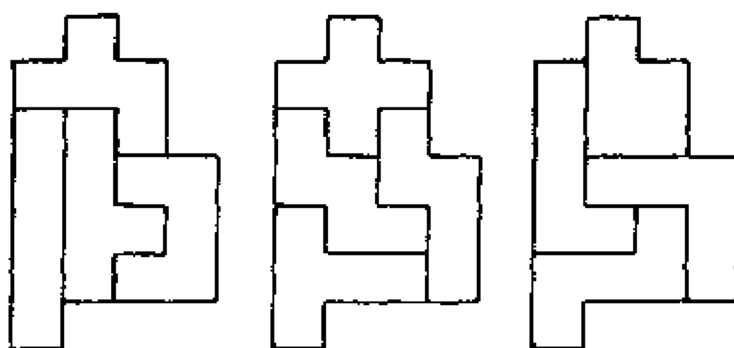


图 8-16

[82]

我们还将提到一个与此相关的问题，那就是是否有可能把 12 个不同类型的五米诺，四个四个地分成三组，使得每组都能覆盖一个 4×5 的，20 个方格的矩形？

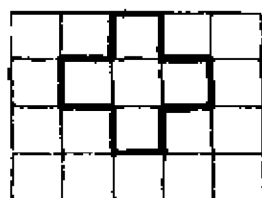


图 8-17

考虑图 8-17 所示的 4×5 区域. 显然，X 型五米诺必须在某一组中出现. 但图中 X 型米诺放置的地方，是仅有可能的位置. 因为不然的话，便会留下任何五米诺都无法覆盖的孤立方格. 图 8-17 表明，当 X 型米诺处于

这种位置时，我们必须用两个以上的 U 型或 L 型米诺，才能覆盖剩下的 15 个方格. 因而在这一情况下，对于 4×5 矩形，所提的问题没有解答！

现在回到原先一般性的 20 个方格区域的问题上来. 对此我们已经知道了 115 种的解答. 下面让我们仔细考虑一下，对于一种解答，要满足什么样的条件才成为可能. 很明显，任何 20 个方格结构的形状，如果能够摆放 3 组中的每一组，那么它首先必须是这样的：对 12 种五米诺类型中的每一种，当适当摆放时，总能隔离出一个 5 倍数的方格数.

下面我们用着色概念来探讨第二个条件. 如果我们把 12 种五米诺类型的每一个，放在一方国际象棋盘上，那么除了 X 型五米诺外，它都将覆盖一种颜色两个方格，另一种颜色三个方格. 而 X 型五米诺，则覆盖了一种颜色四个方格，另一种颜色一个方格. 于是，除 X 型米诺外，任何四张五米诺都将覆盖至少 8 个，至多 12 个同一种颜色的方格. 不失一般性，我们假定这种颜色是黑的.

现假设在国际象棋盘上，有一个覆盖了 8 个黑格和 12 个白格的区域. 那么，只要通过转换颜色，便能变成一个覆盖 12 个黑格和 8 个白格的区域. 类似地，一个覆盖 9 个黑格的区域，能够转换为覆盖 11 个黑格的区域. 对于一个覆盖 10 个黑格的区域，转换结果不会改变其黑格的数目. 这意味着一个区域，如果它是被找到的解，必须是这样的：该区域所覆盖的黑格数目最大值是 10，11 或 12. 图 8-18 所示的区域，覆盖黑格的最大数为 13，因而它不可能是 20 格问题的解答. 这个结论也是容易想到的. 因为在这个区域中，只有一个地方可以摆放 I 型米诺，但这样一来就把一个 3 个方格的区域，隔离了出来.

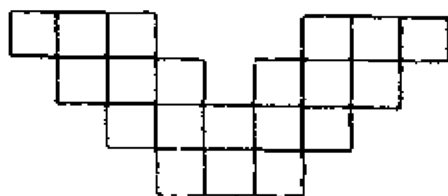


图　8-18

于是，我们得到了 20 方格形

[83]

状可解的第二个条件:即如果把它搬到国际象棋盘上,则必须包含 10、11 或 12 个黑格.

不幸的是,上述两个条件仅仅是必要的,满足这些条件的区域也未必有解(如前面讨论过的 4 × 5 区域).至于充分条件,到目前为止尚未被发现.

(3) 把 12 种不同类型的五米诺分为三组,每组四个,再将每组细分为两对.现找三个 10 个方格的区域,使得它们的每一个,恰能被相应组的两对所覆盖.这样的解已知有 18 个,图8-19和图 8-20 是其中的两个.已经证明,这 18 个结构包含了所有可能的解答.

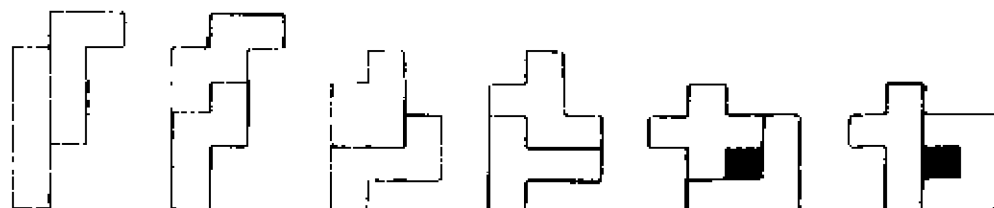


图 8-19

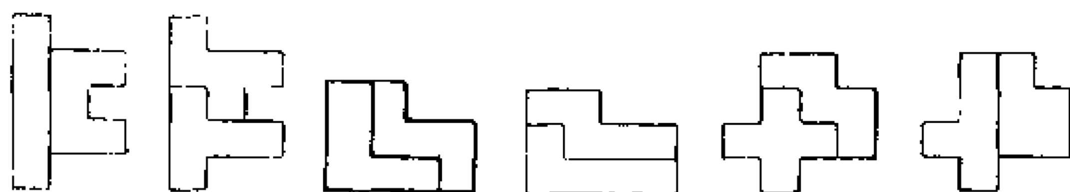


图 8-20

(4) 把 12 种类型的五米诺分为四组,每组三个,并找出一个15 方格的区域,使得四组中的每一组都能覆盖它.没有人能够知道这个问题的解答,也没有人能证明它是不可解的!

另一种令人喜爱的五米诺娱乐种类,是含于这样的问题:即用全部 12 种五米诺,拼排出各种不同形状的图形.图 8-21 所示的是一个拉长的十字架,它可以由 12 张五米诺牌,用好几种不同的方法来覆盖.

图8-22展示了一种61个方格的结构，中心带有一个单米诺. 可以证明：用12张不同的五米诺牌，不可能覆盖这剩下的60个方格. 如果那张单米诺牌放在别的位置，那说不定就会有解. 图8-23所示的就是可解的一种.

图8-24展示了一个60方格的结构. 我们当然希望它对于12张五米诺牌能够有解. 然而，通过以下十分巧妙的方法，可以证实它不可能有解答！

图 8-21

事实上，计算上述结构中边缘的方格数，可以得知它总共有22个. 而12张五米诺牌的每一张，能够成为边缘方格的最大数，有如下表：

T——1， *W*——3， *Z*——1， *L*——1，
U——1， *X*——3， *F*——3， *P*——2，
V——1， *Y*——2， *I*——1， *N*——2.

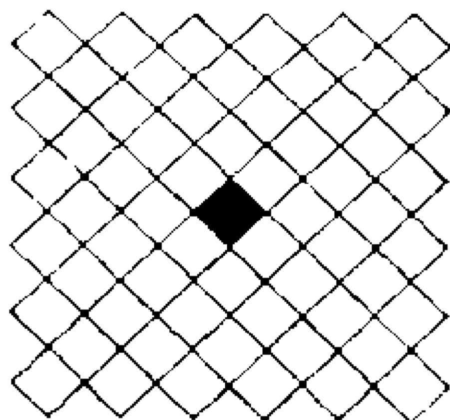


图 8-22

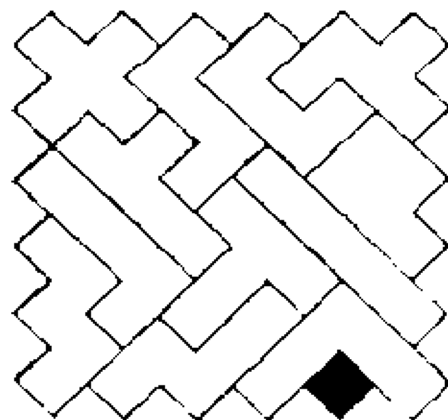


图 8-23

这里总共只有 21 个方格可能作为边缘方格.所以图 8-24 所示的结构,是不可能由 12 种不同的五米诺拼排而成的!

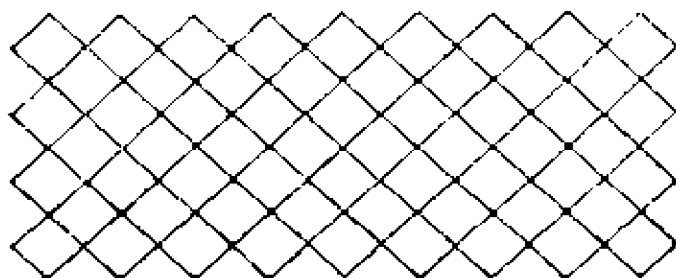


图 8-24

有些证明可能令人惊讶地简单,然而另外一些证明却是异常复杂.前面提到的那个与图 8-22 相关连的证明,仅用于写明初步原因及证法要点,就要花上两页的笔墨!由此可以看出,为什么对于多阶米诺的研究,在广袤的数学领域,有着十分合法的地位.

读者或许会对多阶米诺可行性的更加深刻的挖掘感到一种诱惑.下面我们想通过一些与棋盘和棋子相关连而引发出的问题,来继续这种探索.

在"神秘的阵列"一章(第 3 章),我们概述过构造幻方的一般性方法.本章我们将介绍一种更进一步的方法,它是基于象棋的"马"步移动(一只"马"的移动,是从棋盘某 1 × 2 矩形的一个角,移动到它的对角).

在第 3 章中,劳伯尔方法对于构造奇数阶幻方是详尽的.令人惊讶的是,同样的原则能够通过"马"步移动得出:即用向上移动两格,向右移动一格,来替代劳伯尔方法中向上及向右各移动一格(即移向右上对角).再者,如果"马"步移到了幻方的框外,我们则想象把该阵列延拓,然后将"马"移动到原先阵列相应的格中.如果"马"步到达的位置已被"占据",那么,我们就必须像劳伯尔方法那样,在原先地方

10	18	1	14	22
11	24	7	20	3
17	5	13	21	9
23	6	19	2	15
4	12	25	8	16

图 8-25

落下一格再继续我们的工作.图8-25所示的5×5幻方,图解了这种“马”步移动的要诀.

规范的象棋问题是:白子必须在指定的移动步数内将死对方,以结束游戏.限定步数,是防止一些人沉溺于无休止的转移.这里有许多有趣的谜题,它们是基于棋子多样性的移动.

你能在一个棋盘上放16个白子,使得其中的每一个子都保护着,而且只保护着其他一个子吗?图8-26给出了一种解答,但还有其他解答.

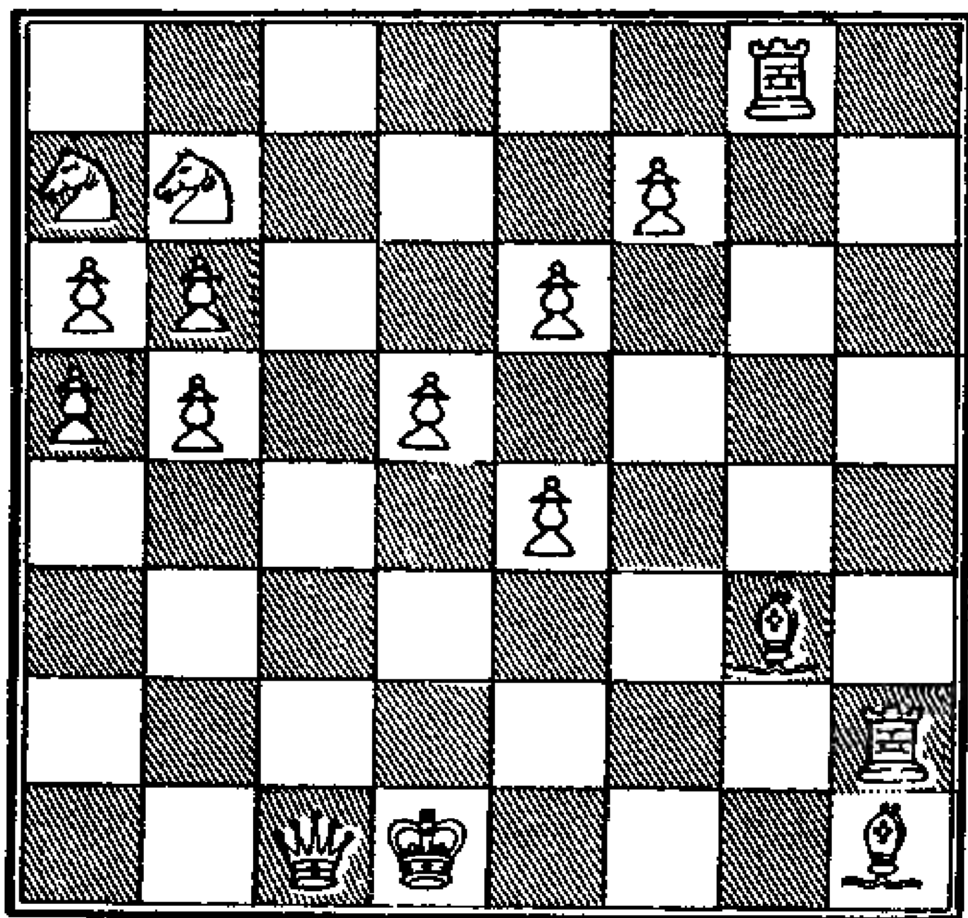


图　8-26

你怎样放8个高级的棋子(或白或黑,但不是“兵”)使得:

(a) 最多的方格处于攻击之下?

[87] (b) 最少的方格处于攻击之下?

对第一种情况，有不多于 63 个方格同时受到攻击，但全部 64 个方格都受到攻击的不可能性，至今仍无法得到证明. 特罗恩(B. R. Trone)曾展示了一种 64 个方格同处于攻击之下的棋势，可惜它的两个"象"都在同一种颜色的方格中，这使得该解答失去了效力. 在图 8-27 中，展示了一种棋势，其间 64 个方格要么处于攻击之下，要么已被占据. 而图 8-28 则是最少攻击问题的解. 这里有 16 个方格受到攻击. 当然，两个"象"是位于不同颜色的方格中.

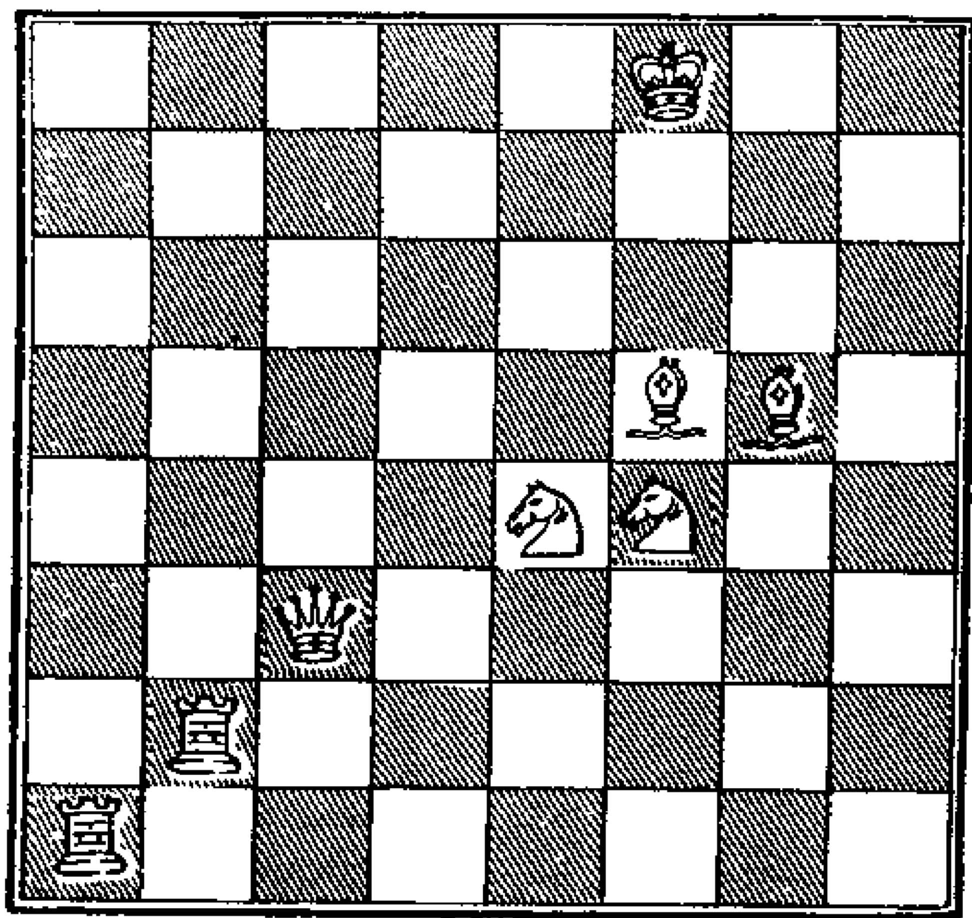


图 8-27

在一个规则的 8 × 8 棋盘里，你能识别出多少个不同的矩 [89] 形呢? 对于一般 $N \times N$ 棋盘的情况，又是多少呢?

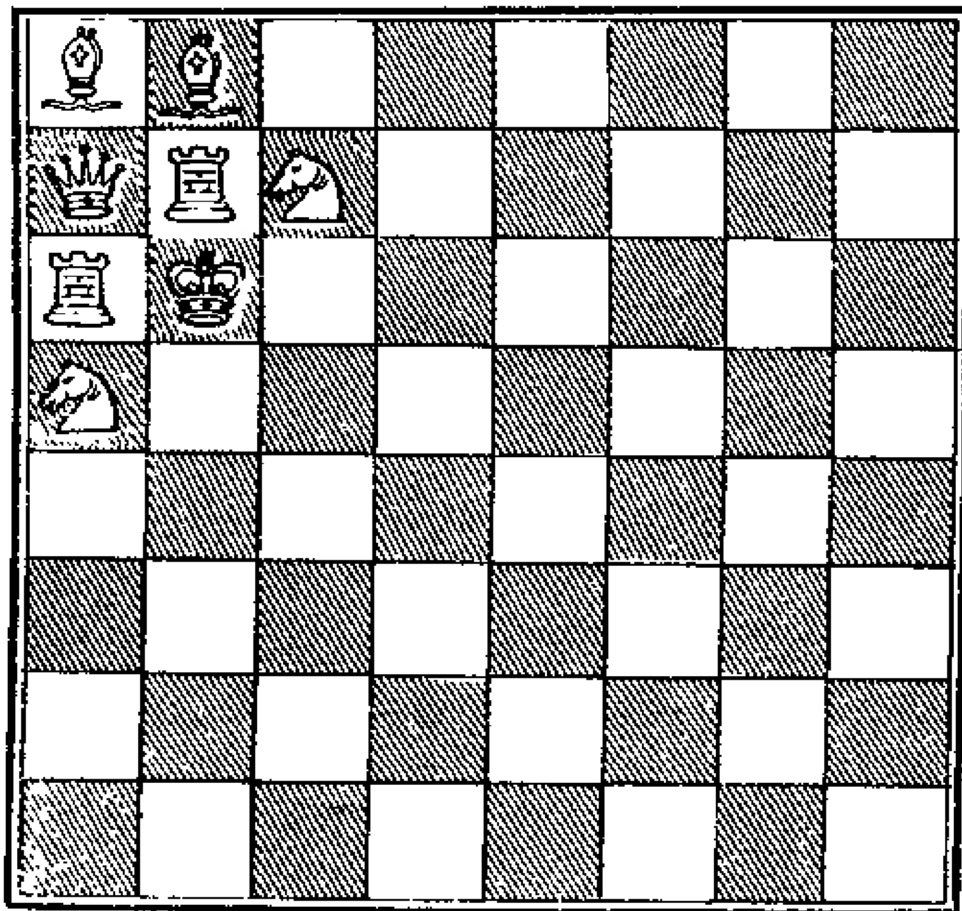


图　8-28

[88]

第9章　文字数学及类似课题

没有人知道字母算术是在何时或何地开始的，但它那看起来似乎是字谜的形式，却早在一千年前的印度和中国就已有过.

就基本而言，这样的谜题，表现出的是简单算术计算的有规则的摆放：或加，或减，或乘，或除，只是原来数字的地方，换成字母表上的字母，或其他非数记号. 在一则这样的谜题中，每一个字母都代表着一个不相同的、特定的数字，而解答者则需要去找出这些字母所代表的数字的值，并使它复原成原始的计算.

当然，在基本主题上有时也会变更. 例如，有些数字可能只用星号来表示，而没有注重它们各自数字值的区别.

1931 年，梵吹夸特(M. Vatriquant)在著名的娱乐数学杂志《斯芬克斯》[①]中(现已停刊)，首次提议在这类谜题中，使用"隐算术"(cryptarithm)这个新名称. 然而这样做，除了多一些谜题的爱好者外，并没有改变谜题的任何形式，反而出现一些无创意的，甚至是可怕的状态，这种状态表现为字母外观上无意义的混杂.

梵吹夸特作为介绍"隐算术"这个新名称时所用的范例是：

---

① 译者注：该杂志英文名称为 Sphinx，原指埃及带翼狮身女怪. 传说她常常叫过路的行人猜谜语，猜不出者即遭杀害.

```
      A  B  C
         D  E
     ---------
      F  E  C
   D  E  C
  ------------
   H  G  B  C
```

1955 年,作者亨特创造了一个比隐算术更具吸引力的新词:“文字数学”(alphametic).在文字数学题中,会出现一些意味深远的词或短语.这些词或短语的出现,可供未来的解答者消遣.例如,梵吹夸特的谜题,出现在真正的文字数学里,可能是一种更加令人喜爱的形式: [90]

```
      B  U  T
         W  E
     ---------
      G  E  T
   W  E  T
  ------------
   L  O  U  T
```

(注:看答案部分)

这个有着深长意味的,谜题的新名称,起于一次幸运的印刷错误.一位记者写信给亨特,盘问他应该怎样去描述一个字母数字,以便在今后的日报上,更多地刊登这类有特色的问题.而那时,这类问题仅出现在多伦多出版的《天体与邮政》杂志及另一种报纸上.在信中“字母数字”一词曾重复多次,但有一次却写成“alphametical”(一个当时不存在的字,现译为“文字数学”).而正是它,唤起了亨特的灵感,结果采用了文字数学这个通俗的名称.而正是这个新颖而又意味深长的词,极大地增加了公众对于这类谜题的兴趣.

对于解文字数学或隐算术的问题,没有什么现成的规则,关键在于:需要对文字数学基本事实的全面理解,有关数学的专门技巧,清晰而合乎逻辑的推理,以及相当的决心和耐心!

下面一些例子，由易逐步过渡到难，其中许多是真正的文字数学题. 由于篇幅关系，不允许我们在此列出它们的全部和详细的解答，因为其中有一些是极为冗长的！不过，我们还会在本书稍后的适当部分，对每道谜题概述其富有启发性的解法.

(1)
```
  L O S E
  S E A L
---------
S A L E S
```

(2)
```
          D O
      -------
D O ) F L Y
      I F
      -----
      D R Y
      D R Y
      -----
```

(3)
```
  S E T
  N E T
  -----
  U S E
      A
-------
L U R E
```

(4)
```
T R I E D
D R I V E
---------
R I V E T
```

[91]

(5)
```
    F U N
      I N
  -------
    * * *
  * * *
  -------
  F A C T
```

(6)
```
      T H E
  S E V E N
  S E V E N
-----------
T E A S E R
```

(7)“我要一张发票！”波塞尼弗太太收起了她所买的东西声称道. 于是彼得替她开了一张.

有些顾客可能有此嗜好，但却不像这个啰嗦的女人. 可怜的彼得！

在这张发票中，每个大写字母代表一个不同的数字. 而用以记述项目的数字前的字母、代表数量. 试问、发票上的合计款是多少？

```
L    480082  单价    NC(分)  …  N. N N
C  1637592  单价     C(分)  …   . B L
S     1632  单价 P.NL(元)  …  S. C K
                             ————————
                             E. E O (元)
```

(8)

```
          I T
      ————————
I S ) T H A T
      T R Y
      ————————
        ? ? ?
        ? ? ?
      ————————
```

(9)

```
              A R T
        ————————————
E V E ) T R U S T S
        * * * *
        ————————————
              * * *
              * * *
              ——————
```

(10)

```
P O S H
C H O P
———————
S H O P
```

(11)

```
          N O
      ————————
L A D ) T O O K
        K I T
      ————————
          * * *
          * * *
          —————
```

(12) 一个极为悲伤的故事！它发生在每一天[①]. 用于两部分中同样的字母，表示同样的值.

```
    I C Y
  R O A D         C C C
    C A R           N O
—————————       ———————
S K I D S         C A R
```

[92]

① 译者注：出现在谜题中的文字，大意是：在结冰的道路上，汽车虽然刹了车，但却依然滑着走. 隐喻：车祸即将发生，危险万端！这就是作者所说的，发生在每一天的悲伤的故事.

(13)

```
           I T
CAN ) M A R L
      C A N
      S A I L
      * * * *
```

(14)

```
    X M A S
    M A I L
  E A R L Y
-----------
P L E A S E
```

(15) 没有那一本文字数学的集子，会把这第一个知名的具有特别形式的谜题排除在外. 从各方面看，它都算得上是一道真正的文字数学题. 然而，它却在该名称被介绍之前三十年，就已家喻户晓！

```
  S E N D
  M O R E
---------
M O N E Y
```

(注：看答案部分)

现在我们给出一个具有相当难度的文字数学题，作为上述问题在文字方面的接续. 但两者间字母的值相距甚远，没有丝毫关系.

```
    H E
S E N T
    H E
S E N T
  T H E
  T E N
-------
T H E N
```

(16)

```
     E E R Y
       O W L
 -----------
   * * * * *
 * * * * *
 * * * *
 -----------
 R R R R R R
```

(17)

```
              M A N
        -----------
M A N ) D I Z Z Y
        * * *
        ---------
        * * D *
          * * R
          -------
          * * * Y
          * * * *
          -------
```

[93]

(18) 下面是一个“双倍正确”的加式.其正确性不仅在于加法本身,还在于“THREE”(英文 3)所代表的数确实能被 3 整除,而且“SEVEN”(英文 7)所代表的数也能被 7 整除.

```
  T H R E E
  T H R E E
      O N E
 -----------
  S E V E N
```

(19) 在这个稀奇的谜题中,所有的星号都表示素数.按通常的定义,数 1 不作为素数看待.

```
     * * *
       * *
 ---------
   * * * *
 * * * *
 ---------
 * * * * *
```

(20) 在以下形式不同的文字数学题里,五个关键词(已用

英文大写字母标出)的文字,遵从通常的规则.

"一呎[1](FOOT)加一呎再加一呎,

总和一码(YARD)为你所知.

若在托盘(TRAY)加上食物(FOOD),

怎样总和给你喜悦(GLOW)?"

(21)

```
    F O U R
      O N E
  T H R E E
  T H R E E
-----------
E L E V E N
```

(注:FOUR 要能被 4 整除)

(22)

```
    T E N
    T E N
  N I N E
E I G H T
T H R E E
---------
F O R T Y
```

(注:NINE 须是一个完全平方)

(23)

```
                  * 7 * * *
       ------------------------
* * * ) * * * * * * * *
        * * * *
        -------
            * * *
            * * *
            ---------
            * * * *
              * * *
              -------
                * * * *
                * * * *
                -------
                      5
```


[1] 译者注:"呎"即英尺.

(24) 在卡洛塔(岛名),饮料广告是没有限制的.

这里有一则近期刊登在这个风光绮丽的小岛的报纸上的广告,还带有一张长长的诱人的冷饮画.然而,这确是一道不平常的文字数学题,其间的每一个大写字母,自然表示不同的数字.

"溅出的液汁(SPLASH)洒在这

巨大的方格(SCOTCH)上,

形成了一种诗情画意(POETIC).

如果你把冰(ICE)从顶部(TOP)拿走,给出的结果将是

两个完全立方数的总和."

(25) 最后,我们用一个稀有的问题作结束.在整个题目中没有给出数字,也没有什么特别的地方.像这样特殊的谜题实不多见,最多也不过四五个.

注意在问题中的小数点!

```
                  * * * * . * * * *
          ---------------------------
  * * * ) * * * * * *
          * * *
          -------
              * * *
              * * *
              -------
                * * *
                * * *
                -------
                  * * *
                  * * *
                  ---------
                      * * * *
                      * * * *
                      -------
```

[95]

第10章　什么是机会?

在讨论概率和机会之前，我们必须十分清晰地界定这些术语，弄清它们之间的不同含义.

在一次试验中，一个特定结果的概率，是指该试验中这种特定结果的可能数，与所有可能结果的总数的比. 例如，我们掷一枚硬币，一次有两种可能的结果：正面朝上或反面朝上. 因此正面朝上的概率，便是$\frac{1}{2}$. 类似地，如果我们投掷的是单个的骰子，由于骰子的六个面写有 1 到 6 的数字，所以出现数字 5 的概率便是$\frac{1}{6}$. 出现数字 5，只是在投掷时出现的 6 种可能结果中的一种.

在一次试验中，"有利"于某特定结果的机会，是指该试验中这种特定结果的可能数，与其他可能结果的总数的比. 在我们掷币的简单情况下，有利于正面朝上(或反面朝上)的机会为1∶1，并说它具有对等的机会. 对单个的骰子，在一次投掷中，投出数字 5 的机会是$\frac{1}{5}$：这里数字 5 的出现是一种结果，与其相反的是其他五种可能的结果.

我们还经常涉及相反于某特定结果的机会，这种机会可以由取有利于某特定结果的机会的倒数求得. 例如，投掷一个骰子，相反于投出数字 5 的机会是 5∶1.

如果我们投掷骰子 6 次，那么数字 5 就有望出现一次. 当

然，它也可能不出现．倘若骰子投了六千次，那么数字 5 的出现会很接近于一千次；倘若我们投的是六百万次，那么 5 的出现就会很接近于一百万次．其接近程度要比投六千次更加牢靠．概率提供了事件发生或不发生的可能性的一种度量，但它不能准确预测在有限次试验中，事件将要发生的情况．

我们能够计算出，在六次投骰子中数字 5 出现至少一次的 [96] 概率．最简单和便捷的办法，就是改去计算在六次投掷中它一次都不出现的概率．

数字 5 在第一次投掷中不出现的概率明显地为$\frac{5}{6}$．而在第二次投掷中不出现的概率也是$\frac{5}{6}$．于是在头两次投掷中它都不出现的概率是$\left(\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\right)$，即$\frac{25}{36}$．照此，在头六次投掷中它都不出现的概率为$\left(\frac{5}{6}\right)^6$，即接近于$\frac{1}{3}$．因而，在六次投掷中它至少出现一次的概率接近$\frac{2}{3}$．由此我们能够粗糙地说：数字 5 在六次投掷中至少出现一次，比对半的机会还要大．

连续两次投币，每次都出现正面的概率是多少呢?由于每次分别出现正面的概率是$\frac{1}{2}$，所以两次都出现正面的概率是$\left(\frac{1}{2}\right)^2$，即$\frac{1}{4}$．当然，两次投出反面的概率也是一样的．这些概率还很容易从以下投币的结果看出：

(正，反)；(正，正)；(反，反)；(反，正)．

这里有四种不同的结果，每一种都有相等的可能．只有一种给出连续两个正面$\left(\text{即概率}\frac{1}{4}\right)$，也只有一种给出连续两个反面$\left(\text{即概率}\frac{1}{4}\right)$．

如果你连续六次掷一枚硬币，每次都得到正面，那么你可能

会想，第七次掷的时候还是正面的概率一定非常小．但是，假如硬币本身没有毛病的话，那么第七次投掷出现正面的概率依然是$\frac{1}{2}$，即对半的机会．

另一方面，连续投出七次正面的概率，确实非常小，事实上它等于$\left(\frac{1}{2}\right)^7$，即$\frac{1}{128}$．

后一个例子表明，当我们着手任何概率计算之前，弄清问题中的规定是多么地重要．再一点需要提起的是，对于任何的假定，其有效性务须十分可靠．例如，对于各种特定结果都是等可能性的假定．

对π的估值，已算到超过小数点后 100000 位．在这超过 100000 个的数字序列中，我们似乎可以假定出现在其中的十个 [97] 数字：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，每一个都是等可能的．确实，数字的统计也使我们坚信了这一点．然而，这一切决不是这种假定真实性和有效性的证明．仍然存在这样一种可能，即当我们把π的值算到小数点后 200000 位时，其中某个数字的出现占据了明显的优势，那么我们就可能猜测，在π的无限延伸的估值中，该数字出现的概率，要大于 10％．①

许多悖论的产生，跟最简单的概率问题相联系．其中有些错误无疑是很明显的，但另一些则需要高深的数学理论加以证明，也还有一些，问题本身就并非完全合理．

卡洛尔(L. Carroll)提出了一种饶有趣味的悖论，它令许多内行人迷惑不解，尽管要指出它的错处并不太难：

“一个袋中有两根算筹，每根要么是白色的，要么是黑色的．

---

① 译者注：关于π的估值算到小数点后 100000 位，这是本书初版时的进展．如今已大大地突破了这一上限．1987 年日本学者金田康正把π算到了小数点后 133554000 位．据有关报道，目前π的估值已算到小数点后 10 亿位，从这 10 亿个数据的统计表明，这里提出的关于数字出现等可能性的假定，似乎更加接近真理．

现要求不从袋子里拿出，而确定它们的颜色.”

卡洛尔“证明”，答案应是“一白一黑”.理由如下：

我们知道，如果袋中含有3根算筹：两黑一白，那么从中抽出一根黑色算筹的概率是$\frac{2}{3}$，而其他任何情况都不可能得到这一概率.

现考虑袋子中的算筹，由于假定只有两根，所以它包含（黑黑），（黑白），（白白）三种可能性，相应于它们出现的概率分别为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$.

加一根黑色的算筹到已有两根算筹的袋子里面去！

现在袋子中有了三根算筹，其颜色的可能性是（黑黑黑），（黑白黑），（白白黑）.正如前面所说，它们的概率分别为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$.

因此，现在从袋子里抽出一根黑色算筹的概率必须是：

$$\left(\frac{1}{4}\times 1\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

但是，前面说过，这一概率要求袋中包含有2根黑色的算筹和1根白色的算筹.也就是说，袋子里必须包含（黑白黑）.由于其中有一根黑色的算筹是后来加进去的，所以原先袋子里所包含的算筹应该是“一白一黑”.

一个令人吃惊，但却是明显的逻辑的结论！

其实，卡洛尔引进这第三根算筹，只不过是为了搞乱问题.同样的十分错误的结果，在没有这种故意错杂的情况下也会得到.

[98]

回到只有两根算筹的情形.袋子里算筹的颜色包含（黑黑），（黑白），（白白）三种可能，其概率分别为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，正如卡洛

尔在议论中正确陈述的那样．分开各自的情形，抽出一根黑色算筹的概率是 1，$\frac{1}{2}$，0．结合这些概率得知，从袋子中抽出一根黑色算筹的概率是：

$$\left(\frac{1}{4}\times 1\right)+\left(\frac{1}{2}\times \frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\times 0\right)=\frac{1}{2}.$$

抽出一根算筹为黑色的概率是$\frac{1}{2}$，这表明袋子里的算筹必须是一黑、一白．这与卡洛尔的结论是一样的，但这里没有用到第三根算筹．

下面我们将指出错误！

错误在于议论的最后一步．从袋子里抽出一根黑色的算筹，其概率当然是$\frac{1}{2}$，这跟从袋子里抽出一根白色算筹的概率一个样．然而"证明"中却从来没有涉及到留下算筹的颜色．我们只知道每根算筹要么是黑的，要么是白的，抽出两者的可能性是一样的．不管什么复杂的计算和论证，都无法改变这个事实．然而没有一个有效的结论是从概率的确定中引出的，而这一概率则是问题所固有的，且已明显给出．

一些较难的悖论包含着无限的概念．例如，已知最大的素数是 $2^{19937}-1$[①]（一个有着 6002 个数字的数）．尽管这是一个空前的大数，然而已知的素数却是有限的．但素数的个数是无限的，这意味着任何已知素数的概率为零．这暗示着任何素数不可能被认识．结论是，没有素数是已知的！

这一素数悖论的错处在于错误地把"无限小"当成是"零"

一个有趣的几何概率悖论,涉及到一个圆内接等边三角形.在一个圆内任引一弦,其长度大于圆内接等边三角形边长的概率是多少?

这个问题有三种经典的探讨途径.每一种都引出不同的概 [99] 率估值,而且所基于的论据似乎同样地有效.这里我们还提出了第四种探讨途径,它引出了第四种明显合理的值!这四种不同的解法,我们依次概述如下.先讲经典的三种.

图 10-1 所示的是一个圆内接等边三角形,以及一些弦,它们都垂直于过三角形一个顶点的直径.不难证明,圆心到三角形任意一边的距离,等于圆半径的一半.在图 10-1 中,OC 是半径 OA 的一半,于是 OC 是直径 AB 的四分之一.因而,如果我们取 D 点,使得 $OD = OC$,那么很明显,任何在 C, D 之间垂直于该直径的弦,其长度都大于三角形的边.而所有 A, B 之间垂直于该直径的弦,在 C, D 之间的恰好占了一半,因此所求的概率等于$\frac{1}{2}$.同样的论证,可以用于其他任意方向的圆内接正三角形.于是,看来我们确实证明了题中所求的概率为$\frac{1}{2}$.

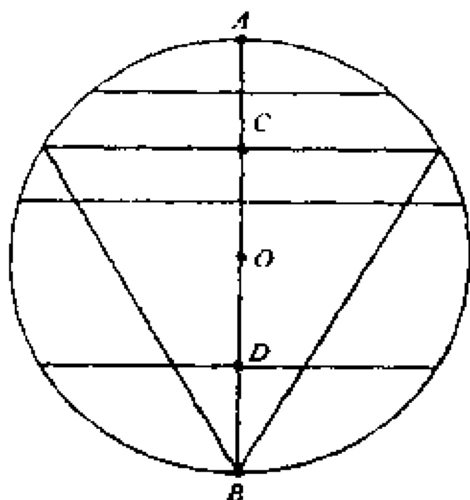


图 10-1

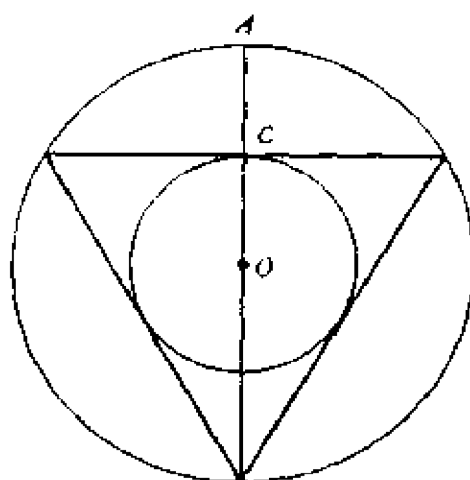


图 10-2

图 10-2 表示了第二种探讨.这里另有一个小圆,内切于

等边三角形. 跟前面一样, OC 是初始圆半径 OA 的一半. 从而三角形内切圆的半径, 是它外接圆半径的一半. 现在我们考虑初始圆中所有可能画出的弦的中点. 不难知道: 弦的中点在内切圆内, 其长度必大于三角形的边. 而中点在内切圆外的弦, 其长度必短于三角形的边. 看来, 任画一弦其长度大于三角形边的概率, 取为三角形内切圆面积与三角形外接圆面积的比是合适的. 由相应的半径比知, 该面积比为 1 : 4. 因此, 所求概率为 $\frac{1}{4}$.

[100]

第三种探讨是非常简单的一种, 现由图 10-3 予以说明. 由等边三角形的一个顶点, 引两条具有代表性的弦. 显然, 像这样由顶点引出的弦的数量是无限的. 而只有那些穿过三角形的弦, 才比三角形的边来得长. 前面讲到的弦, 是在一个 180°的范围里引出的. 而其中只有 60°的范围, 包含了所有穿过三角形的弦. 它似乎表明, 比三角形边要长的弦恰好占三分之一. 这意味着所求的概率为 $\frac{1}{3}$.

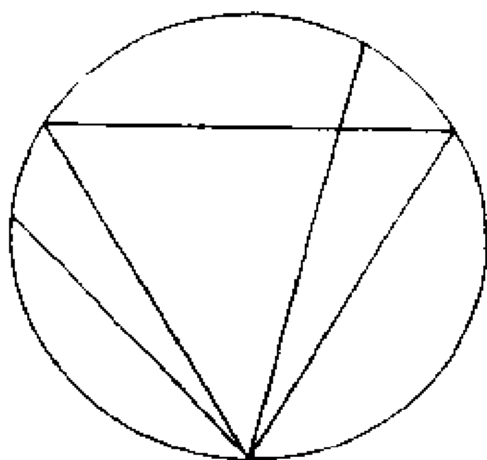


图 10-3

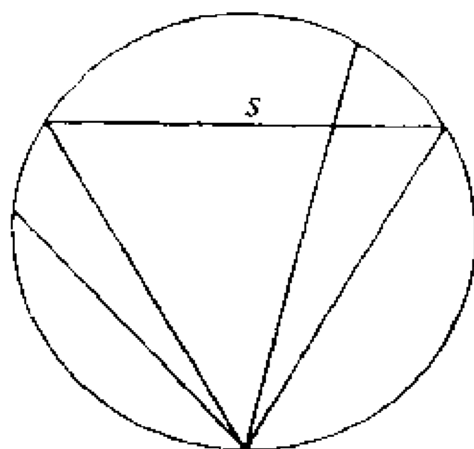


图 10-4

最后概述我们自己对问题的第四种探讨. 现在图 10-4 中加以说明. 这里我们再考虑由一个顶点所引出的可能的弦. 只有那些穿过三角形和弓形 S 的弦, 才比三角形的边来得长. 这样的

弦能够引出无数条.我们似乎可以合理地假定,这无数条弦完全覆盖了圆的面积.而这无数条弦中没有一条互相重叠.因而我们可以取这些弦所扫过的面积比,作为弦的数量比.一种简单的计算法,就是把三角形面积与弓形面积相加,然后比圆的面积.这个比接近于 14 : 23,或者粗糙一点 3 : 5.因此我们能够得出结论:所求的概率接近于$\frac{3}{5}$. [101]

就这样,用四种不同的探讨方法,得出四个完全不同的概率的值:$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{3}$,以及最后的近似值$\frac{3}{5}$.每种探讨都包含了一种假设,这些假设可能有效,也可能无效,不过它们样子看上去都像是合理的.在这一问题中,实际上概率必须是一个明确和固定的比.所以至少它们中间有三种,也可能是全部四种的探讨,是基于错误的假定.然而,谁又能确定呢?

在多数的实用场合,概率能够在一种明显有效,或证明有效的假定下进行计算,而且有些结果是出人意料的!

比如说在房间里有大约 25 至 30 人,它们中间至少有两个人生日相同的概率是多少呢?(生日相同是指在一年中同样的日子,而不必是同样的年份.)可能你会感觉这种概率非常小,说不定真有一些人,会乐于就生日相同一事跟你打一场小小的赌!事实上,随意的一些人的集合,只要人数多于 22,那么他们当中至少有两人生日相同的机会,就将超过一半.

对于一个特定人数的集合,以上问题的概率,能够精确地加以计算.如果我们不考虑 2 月 29 日,即闰年生日的可能性.那么上述概率,精确地由以下公式给出(有 n 人):

$$1-\frac{365!}{365^n\times(365-n)!}.$$

以上公式的近似值,用对数计算非常简单.下面列出的是一些具有代表性的值:

人数	至少两人生日相同的概率
10	0.117
20	0.411
23	0.507
30	0.706
57	0.990
366	1.000

[102]

在上述公式中，我们避开了 2 月 29 日作为生日的可能. 在这种假定下，对于 366 或更多人的集合，有两人生日相同这件事是一种必然（即概率＝1）. 如果把 2 月 29 日也算进去，那么这种必然，就需要集合中有 367 或更多的人. 但必须注意，对于一个只有 23 人的集合，这种机会只略微超过一半.

这种生日的现象是可以加以检验的. 不过，核查生日是一件很为难的事. 提醒你在下一次集会上必须留意，因为说不定有些女士会怀疑你的动机！最好的办法是从传记或字典中去检出一些名字来，然后再查证有关生日的资料. 例如，美国头 34 任总统中，J・K・波尔克与 W・G・哈丁的生日，同在 11 月 2 日.

必须永远记住：正确计算概率，并不意味着可以对未来事件作可靠和精确的预测. 只有等于 1 或等于 0 的概率，才是绝对一定的①. 概率的主要用途在于：它的理论值，对于大量的独立事件，能够提供一种预测，这种预测在平均意义上，十分紧密地贴近实际将要发生的事情.

人寿保险的保险费是基于数以百万计人死亡率的记录. 从这种记录，一个保险统计人员，能够计算出一个人在某特定情况下的概率，例如，在投保 30 年后依然活着的概率. 保险费则无疑

① 译者注：这只能对有限的对象而言. 如果对象是一个无限集，例如数轴上的全体点，那么从中任意取出一点，尽管恰好取到原点的概率为 0，但这仍是有可能发生的.

是基于一种经验,而这种经验则是来自非常大量的,类似情况的一种"平均",它与概率所提供的预见是紧密一致的.然而对人群中个别而言,可能出现与一般经验差别甚远或程度迥异的情形.对于这些人,保险公司可能会损失惨重.但对其他的人,公司则会有所赢余.保险金的规定,就是精确地计算了上面的种种情况,使得对整体人群来说,能为公司留下少量的、合理的赢余差额.

概率在原子物理领域也变得非常重要.分子、质子等不可思议的精细运动是无法个别地加以预测的.但物理学家所涉及的 [103] 是粒子的巨大集合.这就使得我们能够应用概率的理论,合理并准确地预测这些粒子的平均行为.

所有这些,无疑与娱乐数学相去甚远!但整个概率的理论,则是由300年前帕斯卡(Pascal)的一个问题进展而来的.帕斯卡的问题是:"什么是机会?" [104]

第11章 故事难题

1. 没有烦恼的世界

“你太穷了，迈克，”来访者说道，“只有一英亩地，一只奶牛和一间小屋.”

“我很富有，”迈切尔回答说，他对自己的一切都感到满足，“在爱尔兰像我这样的一块地你是找不到的，它正好三边而不是四边，而且每边都相等.牛只需要吃一半的青草而无须更多.在地的一个角落有一根桩，系着一根拴牛的绳子，刚好够长.地上长满了青草，为牛提供了充足的活动空间.我们很快乐！”他微笑着说，“我觉得足够了，而且自由自在！”

那么，请你告诉我，拴牛的系绳有多少长？

[105] （注：本题书中没有给出详细解答）

2. 一个弹子的游戏

“你们自己来，但每人只拿 12 个，”吉姆一边说着一边从盒子里摸出了一打弹子，“我们这里绿色的弹子比蓝色的少，而蓝色的弹子又比红色的少.所以大家拿的时候，每人红的要拿最多，绿的要拿最少.但每种颜色都要拿！”

吉姆自己这样做后，其他的男孩也都照着做.这里总共只有三种颜色的弹子，而且盒子里弹子的数量也刚好够大家拿.

“我们大伙拿法全都不一样！”乔观察了一下大家拿出的弹

子说道."只有我有四个蓝的!"

"那又怎么样?"皮特发现自己在地下掉了一个绿色的弹子,于是把它捡了起来,"让我们玩吧!"

于是他们开始玩起弹子的游戏.

这里总共有26个红色的弹子.试问这里有多少个男孩呢?

3. 奖金

当秘书走进办公室时,杰克微笑着说:"贝蒂,现在我事情已经做完,请把其他人都叫进来."

很快,包括贝蒂在内的五个职员都来到他跟前,不知出了什么事.但老板很快使他们轻松起来.杰克告诉他们:"我想你们一定很高兴知道,我在克莱蒙的交易最后赢利了,这里有一笔260美元的奖金,在你们之间分配,作个意思."

贝蒂想自己职位较低,"也许轮不上我"这令人沮丧的念头,刺伤了她的心.

但令人满意的是,杰克继续说道:"我已经算出了你们跟我工作的完整的年限,并按这个比例发放奖金,但允许男人比女孩每年多得一半."他一边说,一边递给每人一个信封.突发的感激,使雇员们显得有些局促不安.

这对他们来说确是一种好运气!

已知他们工作的完整年限分别是2,3,5,6和7年.请你算出在杰克的职员中女性有几人?

[106]

4. 乘车兜风

"你在忙乎什么吧,比尔,"教授留意地说.这时他的这位朋友正一口气喝完剩下的咖啡,站起来要走.

"准备带三个女孩乘车游览!"比尔答道.

教授笑了:"原来如此!敢问三位佳丽芳龄几许?"

比尔思考片刻说:"把她们年龄乘在一起得出2450,可她们

年龄和恰是您年龄的两倍.”

教授摇了摇头说:“非常灵巧,但对她们的年龄仍然有疑问.”

比尔还在那里,他补充道:“是的,我忘了提起、我的年龄至少要比那个岁数最大的小一岁.”而这使得一切都变得清楚了!

当然,教授是知道他朋友的年龄的.请问,你能算出他们的年龄吗?

5. 他们会相遇吗?

“你从哪儿打电话来?”伯特问道.此刻他正在默顿街和斯普路斯街交角处的办公室里,一边听着电话,一边透过窗户注视着窗外拥挤的交通.

“在戴尔街和金街交叉处的一个公用话亭,”传来的是本恩的微弱的回答,“从你那儿往南走四个街段,往东走几个街段!”

伯特看了一下钟,喊道:“你现在就开始走,我们在半路上碰面!”他砰地一声放下电话.而只是在这个时候他才意识到自己刚才太快挂了电话,没讲清楚互相怎么走法.

实际上,在两个交叉点之间恰好有70种不同走法的线路,而且线路之间的选择跟距离没有什么关系.

[107] 那么,你怎么理解本恩话中“几个”的意思呢?

6. 聚会之后

“昨晚他们离开的时候似乎都还清醒,”鲍勃说着,此时他刚刚从办公室回到家.

“我看不会比你更糟,”他妻子确信地说,“怎么啦?”

鲍勃淡淡地笑了笑,“他们四个人整天都在给我打电话,”他告诉她,“我得去解开这个谜结.他们一个个都互相拿错了别人的大衣和另一个人的帽子.”

“你到家的时候我就觉得有点不对劲,”贝蒂笑道,“继续讲

你这个伤心的故事吧!”

“好吧,我分头说:乔拿走了一个家伙的大衣,而那个家伙的帽子又被史蒂夫拿走;史蒂夫的大衣是被另一个人拿走的,而那个人又拿走了乔的帽子.”

“那么罗恩又怎么样呢?”贝蒂对此颇感兴趣.

“他第一个打电话来,”鲍勃回答,“他把多哥的帽子拿走了.”

这真是一次十足的聚会!试问,乔和史蒂夫拿走了谁的大衣和帽子?

7. 一场温和的赌博

“我没有一美分的零币,”汉克说着,一边叮当地敲着他的钱币,“你有多少?”

本恩查看了一下回答道:“正好五枚.怎么啦?”

“想知道吗?我想我们来一次小小的赌博游戏怎么样?”汉克一边说一边开始分牌,“规定这样的:第一局输的人,输掉他钱的五分之一;第二局输的人,输掉他那时拥有的四分之一;而第三局输的人,则须支付他当时拥有的三分之一.”

于是他们玩了,并且互相间准确付了钱.第三局本恩输了.付完钱后他站起来声明说:“我觉得这种游戏投入的精力过多,回报太少.直到现在我们之间的钱数,总共也只相差七美分.”

这自然是很小的赌博,因为他们合起来一共也只有 75 美分的赌本.

试问,在游戏开始的时候汉克有多少钱呢? [108]

8. 一位在需要时候的朋友

点燃雪茄后约翰靠回到自己的椅子上,他显得对自己的生活很满意.“是的,”他开怀地笑着说,“在三十年前,当我们在一起还是十几岁孩子的时候,我绝没有想过后来会过得这么好.”

他的来访者微微笑了笑.在过去那些日子,他们曾是好朋友,但那是很久以前的事了.今天当他急需一份工作的时候,一种古老的友谊又有什么价值呢?“你的两位兄弟怎么样?”他问道.“他们都比你年轻是吗?”

约翰点点头:“干得不错.本恩,就是最小的那个,已有近百万家产.而泰德,就是原先爱耍小聪明的那个男孩,现在家住华盛顿.比尔,你过去好像计算上挺在行的,看看这样一道问题怎么样?”

这位大亨潦草地写着他的问题,而比尔却在充满希望中等待了几分钟:“本恩的年龄乘以我和泰德年龄的差,与我的年龄乘以他们之间年龄的差恰好少1.这里年龄都是取整年算的.”

“太糟了,”比尔伤心地摇头道,“我本打算来你这儿求份工作,却没想到你倒向我经销起自己的计算能力!”

比尔自然得到了工作.然而,找出那三个人的年龄无疑会给你带来欢乐.

9. 他的第一份工作

“嗨!约翰尼斯,”星期天乔在街上遇到一个年轻人向他喊道,“好久不见,我听说你开始工作啦!”

“几个星期了,”约翰尼斯回答道,“这是一份计件工作,我干得挺好的.第一星期我得了四十多美元,而且后来每个星期都比前一个星期多赚99美分.”

“这真是巧事!”乔笑了笑并继续说,“愿你一如继往都能这样!”

“我估计用不了多久我一个星期便能赚到60美元,”年轻人告诉乔,“自从开始工作到现在,我已经赚了整整407美元.这的确不坏!”

[109] 试问,约翰尼斯第一星期赚了多少?

10. 去别墅

“我已经把一家子都带到别墅去了，”鲍勃说道，“那儿多好，晚上非常安静，没有汽车喇叭声.”

“但你那儿警察照常上班，”雷恩评论说，“难道你那里没有警察?”

“我们不需要警察!”鲍勃笑道，“倒是有一个出现在我们驾车中的难题值得你想.情况是怎样的：头15英里我们平均时速40英里.接着大约在九分之几的路上，我们开得快一些.而在剩下的七分之一路程上，我们一直开得很快.全程的平均车速正好是每小时56英里.”

“你说的‘九分之几’是什么意思?”雷恩问.

“这里的‘几’是精确的整数，”鲍勃回答道，“而后面两段路程上的车速，也都是每小时整数英里.”

鲍勃自然不会带着一家子人用疯狂的速度去驾驶，尽管也可能那段路上刚好没有警察!

试问，在最后七分之一的旅途中，鲍勃他们的平均车速是多少? [110]

11. 左! 右! 左!

“爸! 瞧那些士兵，”就在士兵们暂停下来的时候皮特喊道，“当他们四个四个排成队时，剩出一个人来!”

“如果三个三个排成队他依然剩出来，假如五个五个排成队，他还是剩出来! 毫无疑问，他正好是剩出来的运气，”他父亲陈述说.对此皮特当然同意.

没有多少士兵在操场上操练，甚至不上一百个.

试问，究竟有多少士兵呢?

（注：本题书中没有给出详细解答） [111]

12. 那英国天气

“你好像在英格兰呆了大约五个星期吧，”比尔说着，一边递给他朋友一支烟，“那儿天气怎么样？”

“正如大家说的那样，湿的日子比干的日子多，”多哥笑道，“这使我回想起来，你知道我已经接近戒烟了，但在那儿我发现自己雨天平均每天要抽 20 根烟，但不下雨的日子我每天抽的烟，只有我在那段时间里平均抽烟量的五分之一.”

那便是一种气候导致的结果！

试问，在多哥访问那古老的国家期间，有多少天在下雨？

13. 一分钱上，一分钱下

“你真快！”当丈夫走进他们的小店时苏珊喊道，“你看到什么了吗？”

“看到好多钱，”本恩回答说，“但我用它马上进了大约六打的短上衣.”

“如果价格好的话，我们就把它卖掉！”苏珊议论说，“它们花了多少钱？”

本恩找了找自己的口袋，最后说：“我一定把发票忘在车上了！我买了三种样式的短上衣，每一种都比下一种多买一件.它们的价格很低，买单件与买多件没有什么差别，最贵的样式与最便宜的样式也只差 2 美分.一共花去成本 32 美元 45 美分.”

苏珊对此迷惑不解，她告诉她丈夫：“我弄不明白！”但正在这时一位顾客走了进来，她只好忙着应酬.

[112] 那么，你能算出详细的进货情况吗？

14. 四代人

肯恩过去来过客厅好几次，但每次总跟泰德在一起.而这一次他正在客厅等他的朋友下来，所以有机会看看四周.“他们是

谁?"他指着相框中的两个人的合照问道.

"我妻子的父亲和他的祖父,今年拍的,"约翰告诉他.

"泰德的大祖父!他该有多大年纪啊!"那男孩惊叫道,"我没想到赖尔太太竟然这么年轻."

约翰被逗笑了."好,我回答你的问题,"他说,"泰德大祖父的年纪可以这样得到:把我妻子父亲的年龄乘以我妻子年龄的倒序数,然后扣去她的年龄乘以她父亲年龄的倒序数."

"您说的倒序数,是否就是把年龄中的个位数字与十位数字顺序颠倒呢?"肯恩问道.他一直非常认真地听着.

"完全正确!"约翰点头说,"还有,我妻子的年龄跟她父亲的年龄相加比她祖父的年龄还少 6 岁."

正在这时,泰德来了,接着又带着肯恩匆匆离开了房门.

试问,泰德的母亲有多少岁?

15. 在业余爱好商店

"今天我到山姆的店里,"吉姆说道,"他告诉我早些时候孩子们到他那里买模型飞机的零件,为这些花了 13 美元 50 美分."

"天哪!"他的妻子惊呼道,"他们从哪儿弄来这些钱呢?"

"那都是从他们的小猪银行里取出来的硬币[①],山姆还一直在笑这件事呢!"吉姆回答说,"肯恩的硬币都是同一品种的,而皮特的硬币则是另一品种的,数量是肯恩的三倍.山姆把孩子们的硬币分成数目相等的一堆堆,又把这一堆堆的硬币排成若干行.这里行的数目,每行中堆的数目,以及各堆中硬币的数目,三者相等.山姆就是这样来摆放这些硬币的."

"我想他们一定很有趣地看山姆清点这些零钱,"帕梅议论道,"那儿肯定有很多硬币!"

---

① 译者注:这里说的"小猪银行"是一种孩子们使用的储蓄筒.美国零币品类有 1 美分,5 美分,10 美分,25 美分和 50 美分五种.

[113] 你说这里有多少硬币呢?

16. 独占鳌头

当乔治回到家时,看上去对他自己的生活相当惬意."可能你很快就会有游泳池了,"他对妻子说,"这可是这个区里的第一个!"

"那太好了!"梅布尔兴奋地说,"多少大?"

"还没定,要看价钱,但我比较喜欢山姆的估价.不过,它似乎有点不寻常,"她丈夫回答说,"他是这样估算的:工程结束后按宽每英尺 35 美元,长每英尺 27 美元,分别算出后两者相加.不过,凡不足一英尺的零头均按一英尺算."

"听起来确实有点特别,"梅布尔议论道,"它是规则的长方形形状吗?"

"那当然!"乔治告诉她,"我们要用不到 1000 美元的钱得到尽可能大的面积."

但愿梅布尔不致于失望!

试问,这个游泳池的尺寸应该是多少?

17. 钟

在汤姆那舒适的书房里,人们可以休闲地坐着,宁静地交谈,也许还能喝上一杯马德拉岛的白葡萄酒.

星期天我到他那儿,我们遇到一件有关他的钟的很平常的事情.当收音机报时的时候,那座镀金的古钟正好慢了三分钟.

"这钟每小时慢七分钟,"我的老朋友告诉我,"不多不少,不过我还是照样使用它."

后来在同一个月里,当我第二次在那里与他共度夜晚的时候,我注意到钟面上指的跟收音机的报时全然正确.当时夜似已深,但汤姆向我保证,自我第一次造访以来,他的钟就一直没有调整或修理过.

试问第二次造访时是星期几？ [114]

18. 只有小零币

“我来付！”彼得瞄了一眼帐单说.

“又不是在卡罗塔的最后一天，”他的同伴一边说一边拿出一把硬币放在桌上，“下个月去美国时你来付.”

彼得笑了笑：“好吧，我不争了. 我想你还有一些美国的钱吧！”

“一些一角的银币，总共不到两打，”基克告诉他，“大概你能换些本地的钱给我吧.”

“当然乐意，”彼得回答道，“今天的兑换率是19个库克的硬币换一美元. 让我们看看我们能做到哪些.”

于是他们各都掏空了自己的口袋，基克看后笑道：“看来我们俩都很穷，你硬币的数目只有我的三分之二，而我们两人的钱加在一块也只值八美元，并且要么是一角银币，要么是库克硬币.”

基克说得对，他们俩谁都没有纸币. 实际上彼得也没有足够的本地库克去兑换基克的银币.

试问他们各有多少什么样的硬币？ [115]

19. 共同的生日

“我得早点走，”鲍勃一边把文件塞进抽屉一边说，“今天是我妻子的生日，也是我儿子的生日.”

迪克正玩着纵横字谜，他抬起头来议论道：“这很奇特，两个人同一个日子出生，你孩子几岁？”

“你可以打电话问问他！”鲍勃笑着说，“他跟他母亲年龄的乘积，恰好比他们年龄差的平方多1.”

迪克发现这是一道比纵横字谜更难的问题.

那么，你是怎么计算他们母子俩的年龄的？

20. 在艺术品商店

当乔走进山姆的小店时，山姆正忙着，于是他站在那儿等了一会．看着一笔生意很快谈妥了，顾客显得很满意，把钱递给山姆说："好了，就这五种，我希望明天要．"

"这真是一宗好买卖，"那人一走，山姆就转向乔这边咯咯地笑着，"一百美元还多一美分！"

"一百美元?!"这真是弄不懂！柜台上放着的那五幅装在画框里的画，玻璃上明明标着它们的价格分别是：2.10 美元，3.30 美元，4.62 美元，7.70 美元和 11.55 美元．"我看好像只有 30 美元左右，"乔议论道．

山姆笑了．"那些是他要买的品种，"他说着朝那些画框点了点头，"但每一种却不止只买一幅，而且没打折扣．"

正在这时，又一位顾客出现了，山姆赶紧去忙乎自己的生意，乔也就此离开了．

[116] 试问，那宗买卖的细节如何?

21. 大宪章

"把白葡萄酒，果酒，蜂蜜酒都拿来，"他们喊道，"宪章已经签署，并且全票通过！"

金·约翰和所有的贵族举杯庆祝，他们每人都互相碰杯一次．

高脚杯碰出的叮当声，汇成了铿锵和鸣的乐曲，似乎在宣布那自由时代的来临．

上面说的，那已经是很久很久以前的故事．

但这儿有些东西我们应该知道，那就是高脚杯总共碰击了九百零三次．

试问，你在那儿能看到多少只高脚杯?

[117] （注：对这个小小的幻想曲，书中没有给出详细的解答）

22. 自己动手

比尔太全神贯注于自己的工作,以至于没有立刻与来访者打招呼.但他终于意识到汤姆在审视着自己.

“想把这张旧的平台装修得漂亮些,”比尔歉意地解释道,一边小心翼翼地把一块方形的瓷砖放在水泥台面上,“这个主意是海伦从杂志上学来的.”

汤姆注视片刻,并在一张纸上记下了一些数据.“你不觉得用小一些的瓷砖看起来更美观吗?”他提醒比尔,“如果每块瓷砖边都小四分之三英寸的话,我算了算,要铺好平台的顶面,只要多用 250 块瓷砖,但这很值得.”

“还要再多两块!”比尔查看了一下又想了想,然后摇摇头,“但那是不可能的.这类瓷砖的边长都是整英寸的!”

只好如此!横竖要做那么多事.

请问,比尔用的瓷砖尺寸如何?

23. 谁玩换牌游戏

“小毛毛雨转雪,”气象员这样预报.其实这毛毛雨并不小.

“我们肯定出不去了,”吉姆一边抱怨一边环顾那些来参加他生日聚会的其他孩子,“不如我们来玩换牌游戏怎么样?”

扑克找来了,大家围坐在大桌子旁.

“上次是在你一连赢了三局之后停下来,这不公平,”琼提醒他哥哥,“这次让我们约定:要在每人至少都赢一次时就停下来!”

“好吧!听我说,”吉姆宣布道,“每局游戏输的人每人要拿出 5 美分放在桌面上作为共有金,而胜者则可从中拿走 25 美分.最后一局胜的人则将当时桌面上的共有金全拿走.”

这似乎是一个好主意,于是他们便开始玩起来.而吉姆生日,运气颇佳.他虽然只赢了一局,但却是最后一局,扣去前面输

的，还净赢一美元.

[118] 试问，他们总共玩了多少局？

24. 一则有关饼的故事

"我把饼放在厨房里了，"加利说，"有三种不同的品类，单价分别是 12 美分、14 美分和 17 美分. 总价合在一起正好两美元."

"很好，"他母亲说，"你买了多少？"

加利把总数告诉了她，而他母亲这时正继续看着书. 但过了一会她便停了下来，又在一张纸上计算了一下."我还是说不准你每一种买了多少！"他母亲说道，"你有什么品种只买一个吗？"

加利回答了她的问题. 只有一个词，但这已足够消除他买饼细节的任何疑虑了！

请问加利每种价格的饼买了多少？

25. 必由之路

"好吧，让我们着手开始吧，"史蒂夫宣布道，"包括领班，一共六百人. 他们来自三个不同的省份，希望他们不至于发生争斗."

"这很难办！"比尔点头道，"但无论如何要把他们分开."

"我敢打赌，完全做得到！"史蒂夫笑着说，"尽量把每个省的人分成一个个班，每个班 16 人，外加一名同省的领班. 这样做以后剩下来的再分成两个相等的小组，其中一组包括领班在内都是马尼多巴省的，另一组除领班是魁北克省的外，其余都是安大略省的."

"听起来像是我们的建军节！"比尔议论道，"除此之外，你的安排中似乎还包含一层意思."

"可能你已经想到了，"史蒂夫咯咯地笑道，"的确幸运得很，来自三个省的领班人数，恰好是一样的！"

请问，来自每个省的人及领班各为多少？ [119]

26. 一次阅读的间歇

保罗放下他的书，在一张小纸片上计算着. “这本书里有很多读的东西，”他告诉他的妻子，“我想你也一定喜欢.”

“不要让我等太长时间！”琼微笑说，“你还有多少要读？”

“将近 150 页，”保罗回答道，“我看这里有些东西非常奇特. 第一章是从第 13 页开始的，从这一页到我现在正看着的前一页，那些页的页数相加，跟我将要看的那些页的页数相加，两者和是一样的.”

“那么你看的时候有没有跳过一些页呢？”琼问，“无论如何你等看完书再去算那些东西，我想要书！”

实际上保罗一页都没有跳过. 试问，他手头正在读的是第几页？

27. 他的私人军队

彼得十分迷恋于摆弄他的“士兵”，今天他把自己的整个“军队”都摆到一张大桌子上来，并且排成两个立体式的完美的方阵.

“一个令人惊奇的组合！”他父亲一边议论，一边用眼睛滑稽地注视着桌面上的结构，“但是，我看没有军官.”

“我在指挥，爸，”男孩解释道，“这两个方阵中一个方阵要比另一个方阵每边多出三个人. 现在我要把它们转换成五个完全相同的方阵.”

“那就够你忙的了！”他父亲笑着说，“这样你至少要有一千个士兵.”

彼得高兴地笑了，但没说什么，他知道他拥有的士兵比那要多得多.

试问，他拥有多少“士兵”呢？ [120]

28. 卡尔神庙的大球

诺克进入神庙并对库利说：看现在这个大金球，它直径有20基巴（古长度单位）. 毫无疑问，它的声名早已传遍四方. 你可以把其中人们捐赠的部分，制造成实心立体的球. 现在拿着这个球，并用它制作成三个实心体的金球. 每个球的直径都要是整数基巴. 三个球的直径加在一起要等于38基巴. 制作的时候，你不能浪费掉一点点金子！

库利照他的吩咐做了，并实现了把三个球中最大的一个送到卡尔神庙的愿望. 这一天人们斋戒，停止了一切活动.

以上就是古书所说的！

试问，那些球的直径是多少呢？

29. 高峰期过后

当迪克走进小店时，那里显得很静寂，与圣诞节前大为不同. "你已经卖掉了所有的家禽吗？"他观察后说，"好像你告诉过我，这次你没进多少货."

"总共只进20只，"老人微笑道，"它们花了我整整100美元. 价格还真不错，购进一只火鸡只花七美元."

杰克总是干得很好，即使在穷乡僻壤也一样. 这次对他来说算是一次新的冒险.

"我记得你有一种很奇特的选择，"迪克对他说，"只购进火鸡、鹅和鸭. 它们各买多少呢？"

"火鸡的数量是鹅数量的两倍；而买一只鹅和一只鸭所付出的美元数跟鸭子的数目刚好相等，"杰克说道，"这些家禽不管你买一只或是几只，都是同样的单价."

[121] 试问老人购进家禽各多少只？

30. 谁的帽子?

为了弄清那糊涂的帽子事件,一个早晨迈克总在电话头上忙乎着.他觉得当一个俱乐部的秘书,并不总是很有乐趣.

真是糟糕透了!四个成员都抱怨自己丢了帽子.他们当中没有人肯为拿错别人帽子而表示歉意.但真正使迈克烦恼的是,虽然安迪和比尔都没有错拿对方的帽子,但他们却互相谴责对方公然行窃.

"无论如何,"迈克自我安慰道,"有幸的是只有四人涉及其中."另外,也很有幸,其他两人唐恩和查理只把这件事当成玩笑.事实上,他俩都希望迈克能追踪那些几乎完全相同的帽子.

查理拿走了那个没有拿走查理帽子的人的帽子.而那人又拿走了前天晚上第一个离开俱乐部的那人的帽子.唐恩拿走了某人的帽子,而这个人又拿走了那个拿了安迪帽子的人的帽子.

所有这一切都很复杂,或许你能说出谁的帽子被查理拿了?

31. 全部乘客上岸

"对不起,这位女士,可能要耽搁一下你的上岸.他们刚刚告诉我,你的酒单还没付清!"吧台会计对一位妇人说,"你所付的钱,比应该付的钱一半还少一角."

可怜的妇人,她把要付钱的元和分搞对调了!

请问,这位爱饮酒的老妇人到底还要再付多少钱?

(注:本题书中没有给出详细解答) [122]

32. 一元餐

安东尼奥开他的餐厅是不到六个月前的事,但他的一种想法似乎使他收到了很大的效益,那就是只要一元钱的餐饭!最近我路过拜访时,他告诉我:"这是最好的而又很有趣的销售方式."

“价格应该说很得人心,”我议论说.因为他确实对食物很在行.

“我的意思是:每周只卖一次这种特殊的餐饭,”安东尼奥解释道,“第一星期卖 1 份,第二星期卖 8 份,第三星期卖 27 份,以此类推,每星期卖出的份数,都等于该星期数的立方.”

“你可能需要更多的帮助,”我提议道,同时脑子里在试图计算这些立方数.

这老家伙嘻嘻地笑着说:“直至上周末为止卖出份额的总数,正好等于我这里女孩数的平方的又平方.”

可能他这样说是为了帮助我了解吧!但他究竟总共卖出去多少份这样的餐饭呢?

33. 建筑物依然耸立

“那是什么?”肯恩指着其中的一张照片问.

“一些有趣的事,”他父亲告诉他,“比金字塔更古老,据说完全是实体的.”

男孩把照片放近细看.“瞧,一个男人站在那儿!这样看建筑物大约有 30 英尺高吧!”他说着,“爸,告诉我一些有关它的事吧!”

“我推测它也并不遥远,也没更多东西讲,”他父亲回答道,“它是由完全一样的正方体石块堆砌起来的大立方体.又用同样的石块绕它的基座砌一圈方形的台,只砌一层.”

“这样做是什么意思呢?”肯恩问.

他父亲摇了摇头说:“也许它是古代卡罗特人建造的.似乎平台所用石料是大立方体所用石料的两倍.因而砌台时环绕大立方体根部的石块每边都宽出很多.”

下午的休息时间,肯恩都在试图计算那座巨大建筑物里到底用了多少正方体石块.你说究竟有多少呢?

[123]

34. 最实际的路线

“今天我打算驾车去图拉，”比尔说，“你想去吗？”

“当然！”道格告诉他，“多远？”

“从这里走直路正好 21 英里. 但路上有一处上星期雨后塌方无法通过，”他的兄弟回答道，“看来我们只好绕一条更长的路线.”

“好，我并不着急，”道格笑着说，“由你作主！”

比尔点点头. “从这里有一条高速公路直通迪厄，要跑 33 英里，另一条从迪厄到图拉的高速公路，距离也是整英里，”他说，“但这样走也许会更好些：由去迪厄路上的某个地方，穿插到那条塌方的路上去. 我知道那里有一条老路可以穿插，而且能够避过塌方的地方，把车直接开到图拉. 这里还有一件奇特的事情，那就是从这里到老路，老路本身，老路到图拉这三段路程距离恰好相等，而且等于一个整英里数.”

试问，这条最实际的路线有多长呢？

35. 选举

露易斯从她正看着的报纸上抬起头来，望着她的丈夫说：“这样看来，威尔逊赢了，但他所得的票数比其他两人加起来还少！”

约翰点点头. “我看是这样，”他告诉她，“实际上我还注意到了有关投票结果的一件非常新奇的东西. 那就是每两个人得票的和，都是一个准确的立方数. 你知道一个数乘以它自己两次便是立方.”

“我相信你说的，”他妻子微笑地说，“但马托克为什么要白扔掉他的竞选基金呢？”

“这是一种令人沮丧的把戏，”约翰低声轻笑着，“他得到的选票还不足百分之十！”

这种情况也可能是一种巧合，有些人尽管所有的条件都具备，但选举的得票率却是最少.

[124] 试问，三位候选人每人得票多少？

36. 什么是数？

“分数是数吗？”她的兄弟刚一进屋苏珊便问，“贝蒂说不是！”

迪克思考着这个问题.“好，我猜你已经把它当成一个数了，”他回答道，“你问这个干嘛？”

“贝蒂跟我打赌一枚两角五分的银币，要我找出一个数，它的平方比另一个数的平方大15，同时比又一个数的平方小15，”他的妹妹宣称，“而我计算了一下，我赢了！”

“我看即使是分数也挺难成功，”迪克笑道，“让我看一看这个令人惊异的数！”

苏珊在一张纸上写下了她的求法，她的解答无疑满足问题的严格要求.

试问能符合上述要求的最简分数是什么？

37. 墓葬地

“汤姆正在讲老多布森的遗嘱，”约翰说，“我才不愿成为他的继承人.”

“我知道，事情来得有些古怪，”莱恩点点头，“但你只好按他所说的去做.”

约翰笑道：“苛求！他规定墓碑石要切成正四棱锥的样子，还要求所有的棱，以及垂直的高都是整英尺.”

“天哪！”莱恩几乎喊道，“不过，我猜测那是有可能的.”

“也许，但你再听.他还坚持棺木的正中心，到墓石五个顶点的距离都准确地等于九英尺.”

怜悯怜悯我们这个可怜的继承人吧！请问，墓碑的尺寸该是

多少呢?

38. 草地变绿的地方

“我希望我的草地能够保持得像你那样绿!”鲍勃一边说,一边靠着低矮的篱笆,像他的邻居那样停止了割草,“为什么你新的花坛都是三角形形状的,而且都不一样呢?”

“这正是我的主意!”布雷恩教授笑着说,“花坛的边都是整英尺的,它周长的英尺数与它面积的平方英尺数正好一样.”

鲍勃就此沉思片刻说:“我猜这是可以算出来的.像这样的不相同的三角形有多少呢?还有吗?”

教授微笑着回答:“我想不能有更多的了,你不妨也试试!”

很明显,在宽阔的草地上空余的地方多的是,鲍勃自然也没什么可说.

试问,那种专门的花坛有多少?它们的尺寸又怎样呢?

39. 短途旅行

本恩把车开到路边停车场时,我正好经过他那里.但见车门砰然打开,一个个旅客争先恐后地出来.“你这个个体司机怎么啦?”当他把最后一位步履维艰的老妇人送下车时我问道.

“好,”他说着露出了高兴的笑容,“这是一次去布伦特的短途旅行.我正好收了五十美元零一美分的车费.”

“这样多?”我喊道,“你这个老强盗!”

但本恩摇了摇他的头,说道:“你看到的只是他们中间的一部分.总共有一名妇女,一帮男人,以及和男人一样多的小孩.但其中有一半的小孩和一半的男人付的只是单程的车费,他们留在布伦特.”

那自然是不同的!“你怎么收他们的车费呢?”我问他.

“对于同样的距离,小孩付成年人车费的一半,”本恩回答说,“而成年人单程的车费就是小孩的往返车费.只是凡不足一

分的都整成一分.”

这样看来他真的没有要价太高!

[126] 那么成年人去布伦特往返车费是多少呢?

40. 分配利润

约翰告诉了他们今年纯利润的总数.“数字准确到分,”他说道,“现在我拿出一种我觉得公平的分配方案.”

他拿起笔记本,对围坐在大桌子边的合股人微微一笑,并概略说了他的想法:纯利润除以合股人数,所得结果扣去10美元后,作为约翰的分配额.“然后,”他继续说,“将余额除以合股人数,所得结果扣去10美元后,分给布鲁斯.”

没有人异议,于是他又继续说:“然后,按年龄顺序,逐人按以上分配的规则分配.最后还剩下一份余额,把它平均分给每位售货员和职员,作为他们的奖金,每人大概100美元左右.”

“这样一来我们自己也只分得5436.07美元.”弗朗克议论道,“但我猜这不是谁的过错,而是今年年景不好!”

没有人对这种可笑的分配方案提出问题,大家都知道这位老人的脾气和毛病.

[127] 试问有多少位雇员分享这最后的余额?

答案与解答

答案与详细的解答，已按条目出现的顺序排列，参照如下：

第 7 章答案

(1) 一刀把饼切为他自己认为相等的两个部分，然后再让另一个人先行选择.

(2) 艾哈迈德拿出他认为正好是三分之一的葡萄干. 克麦尔如果认为艾哈迈德拿得太多，那他可以作调整，把葡萄干返回一部分到袋子中，直到他认为适当为止；如果克麦尔认为艾哈迈德拿出的是准确的三分之一，或者更少些，那他就不调整. 阿里则可按同样的规则，或进一步减少艾哈迈德拿出的份额，或保持不动. 他们三人中谁都有权作最后调整，但最后调整的人必须拿走这个份额（也可能是艾哈迈德，如果其他两人都认为他分得公平而不作调整）. 这样，剩下来的葡萄干便可以由两人平分. 我们可以采用上一题所说的分饼的办法进行.

第 8 章答案

多少个矩形？ 在一个正规的国际象棋盘上，一共有 1296 个矩形，含于外部为 8×8 的正方形中. 在一般情况下，一块 $N \times N$ 棋盘包含 $\frac{1}{4}(N^2 + N)^2$ 个矩形.

第 9 章答案

(i) "But we get wet, lout"（意为：但我们弄湿了，蠢家伙！）：BUT × WE = 125 × 37.

1. SALES = 10921.

2. FLY ÷ DO = DO：841 ÷ 29 = 29.

3. SET + NET = 842 + 142，且 A = 6，LURE = 5904.

4. TRIED DRIVE RIVET：17465 + 57496 = 74961.

5. FUN × IN = FACT：204 × 14 = 2856.

6. THE + SEVEN + SEVEN = TEASER：

$$127 + 87376 + 87376 = 174879.$$

7. 9 本每本 37 美分的书；7 把每把 7 美分的铅笔；2 把每把 1.39 美元的钢笔. 总额 6.60 美元.

8. THAT ÷ IS = IT：$2912 \div 56 = 52$.

9. TRUSTS ÷ EVE = ART：$207828 \div 414 = 502$. [129]

10. POSH CHOP SHOP：$9758 - 3879 = 5879$.

11. TOOK ÷ LAD = NO：$7446 \div 219 = 34$.

12. ICY + ROAD + CAR = SKIDS：

$$628 + 9754 + 259 = 10641.$$

13. MARL ÷ CAN = IT：$9036 \div 502 = 18$.

14. XMAS + MAIL + EARLY = PLEASE：

$$3784 + 7860 + 98205 = 109849.$$

15. SEND + MORE = MONEY：$9567 + 1085 = 10652$.

HE + SENT + HE + SENT + THE + TEN = THEN：

$$10 + 2035 + 10 + 2035 + 510 + 503 = 5103.$$

16. EERY × OWL = 3367×198.

17. DIZZY ÷ MAN = MAN：$61009 \div 247 = 247$.

18. THREE + THREE + ONE = SEVEN：

$$23577 + 23577 + 817 = 47971.$$

19. $775 \times 33 = 25575$.

20. GLOW = 4560，FOOT = 2661，YARD = 7983，
TRAY = 1897，FOOD = 2663.

21. FOUR + ONE + THREE + THREE = ELEVEN：

$$9824 + 871 + 60411 + 60411 = 131517.$$

22. TEN+TEN+NINE+EIGHT+THREE=FORTY：

$$718 + 718 + 8281 + 12347 + 74011 = 96075.$$

23. $12128321 \div 124 = 97809 \cdots\cdots 5$.

24. SPLASH + SCOTCH = POETIC：

$$125013 + 169863 = 294876.$$

TOP − ICE 是　$892 - 764 = 128 = 4^3 + 4^3$.

25. $631938 \div 625 = 1011.1008$.

第 9 章解答

没有能够用以解文字数学或隐算术问题的一般性方法．但在解答这类谜题中，需要用到一些专门的技巧，今介绍如下：

在许多解答中，有些概念是以文字来表达的，例如"7 乘以 4 的末位数字为 8"，为了节省篇幅，可以把它写成："$7 \times 4 \longrightarrow 8$"，类似地"$23 \times 32 \longrightarrow 36$"其含义不说也能明白．

通常我们需要对某字母的可能值构造出一张表，而后列[130]出其他字母的一个或几个相应的值．在这一过程中，有些值因重复或其他原因，明显地不能被接受．哪里出现这样的值，就在哪里把它划掉．这样处理，可以使我们的解答，更快地水落石出！

如果字母 O 出现在文字数学题里，恰好在解答中有些字母的值等于 0，为了避免可能出现的混乱，这时最好把它写成"零"．

如果 N 是任意的偶数，则 $N \times 6 \longrightarrow N$；如果 N 是任意的奇数，则 $N \times 5 \longrightarrow 5$．这些是有用的事实．

任意数的平方，其末位数字为 0，1，4，6 或 9．由于字母的值必须不相同，则 $N \times N \longrightarrow M$ 便暗示着 $M = 1$，或 $M = 4$，或 $M = 6$，或 $M = 9$．

最后，由于明显的原因，所有的谜题，在相应的数的计算中必须遵循通常的习惯，即在写一个数时其首位数字不能为 0．

以下的解答，在多数情况下仅仅是一个概略．

(1)
```
   L O S E
   S E A L
 ---------
 S A L E S
```
S = 1，于是 A = 零，L = 9．由 L + S，E + L = 11，得 E = 2．由此 O = 7．

(2)

```
            D O
DO ) F L Y
     I F
     D R Y
     D R Y
```

$D \leqslant 3, D > 1$.

如果 $D = 3$，则 $I = 9$，这是不可能的.

于是 $D = 2$.

由 $DO \times O$ 知，$O > 7$.

由此 $DO = 28$ 或 29，相应地，$FLY = 784$ 或 841.

而 $O \neq L$，于是 $DO = 29$，$FLY = 841$.

(3)

```
  S E T
  N E T
  U S E
      A
L U R E
```

$ET - ET$ 暗示 $S = E =$ 零.

于是必为 $SET + NET = USE$，E 为偶数.

从而，乘数 $A = 6$.

	T =	1	2	4	5	7	9
伴有	E =	2	4	8	0	4	8
且	S =	4	8	6̸	1	9	7
伴有	R =	5	0	—	6̸	6̸	6̸
且	U =	—	9				
	N =	—	1				

(4)

```
T R I E D
D R I V E
R I V E T
```

如果是减法，$D < T$. 则从 $E - V$，推知 $V =$ 零. 这将导致 $I =$ 零，不可能.

于是这是加法. 从 $E + V$ 推知 $V =$ 零或 9.

令 $V =$ 零. 则 $I = 5$，推出 $R = 2$ 或 7. 但 $R > 2$，于是 $R = 7$，且 $T + D = 6$. 从 $D + E$，$T > D$，推出 $D = 2$，$T = 4$ 且 $E =$

2,这也是不可能的.

于是 V = 9. 则 I = 4,推知 R = 7, T + D = 6. 但 T < D,于是 T = 1, D = 5, E = 6.

(5)

```
      F  U  N
         I  N
   ----------
      *  *  *
   *  *  *
   ----------
   F  A  C  T
```

I = 1, N > 1 推知 F < 5, F ×N < 10. 于是:

N =	2	3	4
T =	4	9	6
F =	3	2	2
I N =	12	13	14
最大值 F A C =	398	287	298
由于不重复 F U N =	302	203	204
使得 F A C =	36~~2~~	26~~3~~	285

于是 FUN = 204, FACT = 2856.

(6)

```
         T  H  E
   S  E  V  E  N
   S  E  V  E  N
   -------------
T  E  A  S  E  R
```

T = 1,且 S > 4.

由 H + E + E 推知,这里必须"进 1",于是 T + 2V + 1 ⟶ S,即 2V + 2 ⟶ S,则 S 是偶数.

	S =		6			8			
	E =		2			7			
	2 V =	4		14			6		16
	V =	—		7			3		—
	H + E =	—	10	9	8	10	9	8	—
伴有	H =	—	8	~~7~~	~~6~~	~~3~~	2	~~1~~	—
又	2 N =			R − 2			R + 3		
于是	R =			4		5		9	
伴有	N =			~~1~~		4		6	
又	A =			—		~~4~~		4	

于是我们有 TEASER = 174879.

(7)	L	480082	单价	NC(分)	……	N.	N	N
	C	1637592	单价	C(分)	……	.	B	L
	S	1632	单价	P. NL(元)	……	S.	C	K
						E.	E	O (元)

NNN 是 37 的倍数，也是 NC 的倍数. 如果 C 是偶数，则 N 也必须是偶数，这样 $NC \neq 74$. 由此 $NC = 37$，推出 $BL = 49$. 从 S. CK 推知 $P = 1$，由此 $S < 4$. 于是 $S = 2$, $K = 8$. 求和即得 $E = 6$，$O =$ 零.

(8)

$$\begin{array}{r}
IT \\
IS\,\overline{)\,THAT} \\
\underline{TRY} \\
??? \\
\underline{???}
\end{array}$$

由 $S \times T$ 推知，$S = 6$ 或 $T - 5$.

若 $T = 5$，则 $IS < 20$，但 $I \neq 1$. 所以不能接受.

于是 $S = 6$，且 T 是偶数. 则由 $IS \times I = TRY$ 知 $I > 4$.

	IS =	56	76	86	96
伴有	TRY =	280	532	688	864

这里，$TRY = 280$ 是仅有可以接受的值，于是

$$THAT = 56 \times 52 = 2912.$$

(9)

$$\begin{array}{r}
ART \\
EVE\,\overline{)\,TRUSTS} \\
\underline{****} \\
*** \\
\underline{***}
\end{array}$$

$R =$ 零. $E < 5$, $T < 5$. $E > 1$, $T > 1$. $E \times T < 10$.

于是	E =	2	2	3	4
伴有	T =	4	3	2	2

但乘积 * * * * 的第一个数字必须小于 E[①],且必须要么等于 T,要么比 T 小 1. 由此 T = 2,并伴有 E = 3 或 4.

列成表:

	E = 3	4
	T = 2	2
	S = 6	8
* * * 开头数字	6 或 7	8 或 9
使得 * * * * ⟶	0　　9	0　　9
由此　A =	~~0~~　　~~3~~	5　　—

[133] 则, TS = 28,于是 * * * = 828,由此得 EVE = 414.

(10)
```
  P O S H
  C H O P
  -------
  S H O P
```

如果是加法,则 H = S = 零. 于是这是减法.

从 P − C 知, P > 2,又 P > S.

下面我们只给出所需表的一部分. 如果完成它,就会出现可接受的解.

	P = 3	4		等等
	H = 6	8		等等
从 O − H,	O = 2	6 或 7		等等
从 S − O,	S = ~~4~~	2	—	等等
它又给出	O = —	~~7~~	—	等等
伴有	C = —	—	—	等等

(11)
```
               N O
        ---------
L A D ) T O O K
        K I T
        -------
          * * *
          * * *
          -----
```

① 译者注:这里"必须小于 E"似应改为"必须不大于 E".

$O>1$，$N>1$，于是 $L<3$，由此 $L=1$ 或 2. $K>2$，$T>3$，$T\neq 5$，$K\neq 5$，于是 $T\neq 6$，$N<K$. 考虑有关因素 $T\neq 9$.

对 $T=8$，7，4，完成下表所示的设计(仅列一部分).

	T =	8			
	K =	7			
由 D × N 及 N < K 得	N =	2	3	4	6
伴有	L =	~~3~~	2	1	1
由 D × N，	D =	—	6	2	3
由 D × O，	O =	—	—	—	9
于是	TOOK =	—	—	—	8997
除以 NO，	LAD =	—	—	—	—

[134]

(12)

$$\begin{array}{r} ICY \\ ROAD \\ CAR \\ \hline SKIDS \end{array}, \qquad \begin{array}{r} CCC \\ NO \\ \hline CAR \end{array}$$

$S=1$，$K=$ 零，$R=9$. 于是 $D+Y=12$，$Y\neq 6$. 又 $2A+C\longrightarrow D-2$. 完成对 $Y=4$，5，7，8 情况的列表，推导出 CCC，CAR 及 O 的值. 由此得出 N，及尚余的数字 I.

	Y =	4	
	D =	8	
	2A + C ⟶	6	
	C =	2	6
	A =	7	5
2A + C 进位	……	1	1
	O =	~~7~~	3
	CCC =	—	666
	NO =	—	N3
	CAR =	—	659
	N =	—	—

(13)

```
                  I T
C A N ) M A R L
        C A N
        S A I L
        * * * *
```

$I = 1$, $A = 9$ 或零,于是 $R \longrightarrow N + 1$.

如果 $A = 9$,则 $N + 1 = R + 10$,由此 $R =$ 零,$N = 9$,不可能. 于是,$A =$ 零,$R = N + 1$.

现 $AN \times T \longrightarrow IL$,又 $A =$ 零,$I = 1$,于是 $N \times T < 20$. $S \neq 1$,又 $T > S$,于是 $T > 2$,由此 $N < 7$. $M = C + S$. $S > 1$, $S < C$,于是 $C > 2$,由此 $M > 4$. 又有 $N \times T \geqslant 10$,及 $T \neq 5$.

完成下表所示的设计,由限制的条件计算 T 的所有可能的值.

N =	2	等等
R =	3	
A N =	02	
T =	7	
I L =	14	
I T =	17	
A R L =	034	

[135] 再由对 IT 除法推知,M = —.

(14)

```
      X M A S
      M A I L
    E A R L Y
  P L E A S E
```

$P = 1$,$L =$ 零,$E = 8$ 或 9.

如果 $E = 8$,则 $X + M + A = E + 19$,则 $X + M + A = 27$,不可能. 由此 $E = 9$.

则 $S+Y=9$，又　$X+M+A=18$，于是 $A>2$，$M>2$.

基于 $S+Y=9$，完成下列表格.

S =	2				等等
Y =	7				等等
A + I →	2				
A =	8		4		
I =	4		8		
M + R =	9		9		
R =	3	6	3	6	
M =	6	3	6	3	
X =	~~4~~	~~7~~	~~8~~	~~11~~	

(15)

```
      H E
  S E N T
      H E
  S E N T
    T H E
    T E N
  -------
  T H E N
```

$3E+2T\longrightarrow$ 零，则 E 为偶数.

$T\geqslant 2S$，于是 $T\geqslant 2$.

因此我们有：

$E=0\quad 2\quad 4\quad 8$

伴有　$T=5\quad 7\quad 9\quad 3$.

完成下表，注意随时可能出现的进位.

E =	8							等等
T =	3							等等
"进位" =	3							
3H + 2N →	7							
H =	1		5		7	9		
N =	2	7	1	6	—	0	5	
"进位" =	1	2	2	3	—	3	4	
给出 H =	~~3~~	~~4~~	~~4~~	5	—	~~5~~	~~6~~	
"进位" =	—	—	—	2	—	—	—	
2S =	—	—	—	~~1~~	—	—	—	

[136]

(16)

```
      E E R Y
        O W L
  -----------
    * * * * *
  * * * * *
  * * * *
  -----------
  R R R R R R
```

$Y \times L \longrightarrow R$，于是 $R \neq 9$，$L \neq 9$. 如果 $E = 1$，则第1行的积不能超过 1176×8，即9408，于是 $E > 1$. $E < R$，于是 $E < 8$，且 $R > 2$. $Y \neq 5$，$L \neq 5$，$R \neq 5$. 从而 $R = 3, 4, 6, 7$ 或8.

如果EERY是11的倍数，则有 $R = Y$，不可能. 但RRRRRR是11的倍数，于是OWL也必为11的倍数，由此 $L + O = W$ 或 $W + 11$. $E > 1$，于是 $O < 5$. 如果 $O = 4$，则 $R \geq 9$（即 $2 \cdot 4 + 1$）. 由此，$O = 1, 2$ 或3. 又 $W > 0$，$L > 0$.

列成表：

O =	1						2				3	
W =	3	4	5	7	8	9	5	6	8	9	7	9
L =	2	3	4	6	7	8	3	4	6	7	4	6

现在列出OWL的值及它们的因子：

$132 = 11 \cdot 3 \cdot 4$　$198 = 11 \cdot 3 \cdot 6$　$352 = 11 \cdot 32$

$143 = 11 \cdot 13$　$253 = 11 \cdot 23$　$374 = 11 \cdot 34$

$154 = 11 \cdot 7 \cdot 2$　$264 = 11 \cdot 3 \cdot 8$　$396 = 11 \cdot 3 \cdot 12$

$176 = 11 \cdot 16$　$286 = 11 \cdot 13 \cdot 2$

$187 = 11 \cdot 17$　$297 = 11 \cdot 3 \cdot 9$

$RRRRRR = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \times R$，OWL的因子也尽在其中. 由于 $R < 9$，因而 $OWL \neq 176, 187, 253, 297, 352, 374$ 或396. 个别地研究剩下的6个值，会发现除 $OWL = 198$ 之外，

其他都应予以排除，这时 EERY = 3367. [137]

(17)

```
              M A N
        ___________
M A N ) D I Z Z Y
        * * *
        ---------
        * * D *
          * * R
        ---------
          * * * Y
          * * * *
          -------
```

Y =	1	4	4	6	9	9
N =	9	2	8	4	3	7

如果 M = 3，则 D > 9，不合. 于是 M = 1 或 2. N > M 且 N > A.

令 M = 1. 则 DIZZY > 20333，N > A，则 MAN > 146. MAN × A < 1000，则 MAN < 167，但 N > A，因而 MA < 16.

MA =	14			15		
N =	7	8	9	7	8	9
Y =	9	~~4~~	~~1~~	9	4	~~1~~
R =	8	—	—	~~5~~	0	—
MAN =	147	—	—	—	158	—
DIZZY =	21609	—	—	—	24969	—

以上两者都是不能接受的. 类似地讨论 M = 2 的情形将产生需要的解. [138]

(18)

```
  T H R E E
  T H R E E
      O N E
  ---------
  S E V E N
```

这个问题的解答是有趣的，因为它为两种有效的设计提供了示范，而后者中的每一种都使工作单纯化. 当然，该谜题能够用更通常的方法来解决.

我们有：

	3E =	N	或 N + 10	或 N + 20
伴有	E + N =	10	9	8
由此	3E =	10 − E	19 − E	28 − E
于是	E =	—	—	7

由此 E = 7，N = 1. 又从 H + H 推知 H = 3 或 8. 在继续动手之前，我们先考虑一下被 7 整除的问题. 检验一个数是否被 7 整除，可以先把数字从右边开始三个、三个地分成组. 对于整除的情形，奇数组（第 1，第 3 等）数的和，与偶数组（第 2，第 4 等）数的和，两者之差必须被 7 整除. 例如，324294558 必被 7 整除，因为 $(558 + 324) - (294) = 588 = 84 \cdot 7$.

现列表：

	H =	3		8		
	T =	2	4	2	3	4
	S =	4	8	5	~~7~~	9
	SEVEN =	47V71	87V71	57V71	—	97V71
由规则	V =	~~2~~ 9	~~1~~ ~~8~~	0 ~~7~~	—	6

此后，再注意到与 2R + O 相适应的值，便能推导出所要求[139]的解.

(19)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & X & Y & C \\
 & & & A & B \\
\hline
 & * & * & P & D \\
* & * & * & E & \\
\hline
* & * & * & R & D
\end{array}
$$

我们把题式写成上面所示的那样，是为了使解答问题时，陈述对象更为明确. 这里并没有涉及到数字的具体值. 当然，这些数字限定于 2，3，5，7.

$2\times 2=4$，$2\times 3=6$，$2\times 5\longrightarrow 0$，$2\times 7\longrightarrow 4$，

于是　$A\neq 2$，$B\neq 2$，$C\neq 2$.

按同样的方法检验 3，5 和 7，我们发现 $D=5$，$E=5$，且 A，B，C 必须像下面那样配合：

$$
\begin{array}{lllll}
 & A,B= & 3 & 5 & 7 \\
\text{伴有} & C= & 5 & 3,\ 5,\ 7 & 5
\end{array}
$$

于是这种三个一组的值，能够列成表：

AB =	33	35	37	55	55	55	57	77	75	73	53
C =	5	5	5	3	5	7	5	5	5	5	5

现在必须对每一组进行检验，这是一个不可避免的艰苦历程！在检验中要注意到 $P=2$ 或 7，这时有 $R=7$ 或 2，因为 $E=5$. 例如，我们检验 $AB=73$，$C=5$.

如果 $AB=73$，$XYC>\dfrac{2221}{3}$，则 $XYC\geqslant 755$.

检验乘法，一旦出现不可接受的数字即行停止.

$$
\begin{array}{r}
7\,5\,5 \\
7\,3 \\
\hline
\not{6}\,5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
7\,7\,5 \\
7\,3 \\
\hline
2\,3\,2\,5 \\
\not{4}\,2\,5
\end{array}
$$

类似地，我们可以检验 A，B，C 其他 10 组的值，并发现其唯一的解. [140]

(20)

$$
\begin{array}{r}
F\ O\ O\ T \\
F\ O\ O\ T \\
F\ O\ O\ T \\
\hline
Y\ A\ R\ D
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
T\ R\ A\ Y \\
+)\ F\ O\ O\ D \\
\hline
G\ L\ O\ W
\end{array}
$$

$T+F<10$，于是 $T<9$. $3F<10$，于是 $F=1$，2 或 3. 由 $A+O$ 推知 $A=$ 零或 9.

完成下表所示设计：

	A =	零	
由 O + O + O…	O =	3	6
伴有	R =	1	—
由 3T 进位	=	2	—
在 GLOW 中	L =	4	—
由 F < 4	F =	2	—
使得	Y =	7	—
由 3T 及进位知	T =	—	—
又	D =	—	—

[141]

(21)

$$
\begin{array}{cccccc}
 & F & O & U & R \\
 & & O & N & E \\
T & H & R & E & E \\
T & H & R & E & E \\
\hline
E & L & E & V & E & N
\end{array}
$$

因为 FOUR 是 4 的倍数，所以 UR 也必须是 4 的倍数. E =1 或 2. R 是偶数.

令 E = 2. 则 T = 9，L = 零. $N \longrightarrow R + 6$，于是 R = 8，N =4，由此 U = 3. 这使得 UR = 38. 于是 E = 1，$N \longrightarrow R + 3$，$U \longrightarrow 9 - (N +$ “进位”)

$V \longrightarrow 2R + 2O +$“进位”

对于 R = 零，2，4，6，8 完成下表.

	R =	0			
	N =	3			
	U =	6			
	U R =	60			
	O =	2	4		
	V =	5	9		
“进位”	=	0	0		
F + 2H	⟶	1	1		
	F =	—	7	5	
	H =	—	2	8	
“进位”	=	—	1	2	
	T =	—	—	—	
	L =	—	—		

[142]

(22)

```
    T E N
    T E N
  N I N E
E I G H T
T H R E E
---------
F O R T Y
```

NINE 是一个平方数，E ≠ 零，E ≠ 9，于是 E = 1，4，5 或 6. 很快地试验一下（或者通过一张平方数表）我们就能发现 NINE 必须是以下四个之一：

2025，3136，6561，8281.

而它们是否可行，则必须逐一加以检验.

例如，我们取 NINE = 8281，并对 T 的一些值展示我们的方法. 同样的步骤则可用于 T = 7，等等. 然后对 NINE 的另外三个值做同样的工作.

N = 8，I = 2，E = 1，N + I + H ⩾ 10，T + 8 ⟶ Y.

	T =	5	6	
	Y =	3	4	
	H =	~~2~~	3	
参照 N + I + H + “进位”，	F =	—	~~8~~	9
由 E + E + N + H + E 的“进位”	=	—	—	1
	I + G ⟶	—	—	7
于是	G =	—	—	5
“进位”	=	—	—	2
N + I + H + “进位”	=	—	—	~~15~~

[143]

(23)

```
              * 7 * 0 *
      * * * ) * * * * * * * *
              * * * *
                  * * *
                  * * *
                  1 * * *
                    9 * *
                      * * * *
                      * * * *
                            5
```

三个未知的数字可以通过审视明显地确定，并已填入上图的相应位置. 第二栏下半部分的 * * *，必须由 7 或 8 起头，于

是除数$<\frac{900}{7}$,即除数<129.从第三栏下半部分的 9 * *,得知商的第三位数字>7,由此商必须是 97809.

由于除数$<\frac{1000}{8}$,即除数<125.

令除数 $=x$,且被除数 $=1000y+z$,这里 $z<1000$.

我们有 $$1000y+z=97809x+5,$$

且又 $$y-97x\geqslant 100,$$

即 $$1000y=97809x-z+5,$$

且又 $$1000y\geqslant 97000x+100000,$$

因此 $$97809x-z+5\geqslant 97000x+100000,$$

于是 $$809x\geqslant 99995+z,$$

由此 $$x\geqslant 124.$$

但 $x<125$,于是 $x=124$. 由除数为 124,商为 97809,被除

[144] 数便不难得到.

(24)
$$\begin{array}{cccccc} S & P & L & A & S & H \\ S & C & O & T & C & H \\ \hline P & O & E & T & I & C \end{array}$$

TOP − ICE = 两个立方数的和. 这里 $T>I$,则 $I\neq 9$, $T\neq$ 零. $A=9$ 或零,$S<5$, $P=2S$ 或 $2S+1$.

解答包含于 S 可能的值,以及与之相伴的其他字母的值所列的表中. 这里我们对所有可能产生 TOP − ICE = 两个立方数的和的数字加以检验. 例如,我们考虑 $S=3$, $P=7$.

	H = 1	4		8	9
	C = 2	8		6	8
	I = 5	1		0	2
	A = 0	9		9	~~9~~
由 P + C 知	O = —	5	6	4	—
3 个剩下的数字:	L = —	0	5	—	—
	E = —	6	2	—	—
参照 P + C,检验	O = —	5	6	—	—
给出最后数字	T = —	2	~~0~~	—	—

但这里 TOP − ICE = 257 − 186 = 71，它不是两个立方数的和.

[145]

(25)

```
                  * 0 * * . b 0 0 c
        * * a ) * * * * * *
                * * *
                ---------------
                    * * *
                    * * *
                    ---------------
                      * * *
                      * * *
                      ---------------
                        * * 0
                        * * d
                        ---------------
                            e 0 0 0
                            e 0 0 0
                            -------
```

为了使识别简单化，对一些关键的数字作了标记(即 a，b，c、d、e). 明显是零的地方也已写上.

所得最后下半部分的积为 e000，我们必有 $c = 5$(此时有 $a =$ 零)或 $a = 5$.

但如果 $a =$ 零，则 $d =$ 零且 $e =$ 零，这是背理的.

由此 $a = 5$，且 c 是偶数. 则除数必须以 25 或 75 为结尾，于是 $d = 5$，推出 $e = 5$. 由此，作为 5000 的因子，除数当为 625. 审视各栏的下半部，注意除数>500，从而直接显示出商数必须是 1011.1008.

第 11 章答案

1. 系绳接近 68 码长.
2. 4 个男孩，15 个蓝色的弹子和 7 个绿色的弹子.
3. 4 个女孩分配 170 美元.
4. “女孩”的年纪：7 岁，7 岁和 50 岁.

5. 从伯特到本恩要往南走四个街段，往东走四个街段.

6. 乔拿走了史蒂夫的帽子，罗恩的大衣；史蒂夫拿走了罗恩的帽子，多哥的大衣.

7. 汉克开始时有 40 美分.

8. 年纪是：约翰 44 岁，泰德 39 岁，本恩 35 岁.

9. 约翰尼斯第一星期赚了 47.41 美元.

10. 鲍勃在最后的七分之一路程平均速度为每小时 72 英里.

11. 61 个士兵.

[146] **12.** 有 24 个雨天.

13. 24 件短上衣每件 48 美分的；23 件每件 47 美分的；22 件每件 46 美分的.

14. 泰德母亲 35 岁.

15. 216 枚硬币：肯恩有 54 枚一角银币；皮特有 162 枚 5 美分的镍币.

16. 水池有 20 英尺长，13 英尺宽.

17. 第二次造访是在星期三.

18. 基克有 52 枚库克硬币，23 枚一角银币；彼得有 43 枚库克硬币，7 枚一角银币.

19. 妻子年纪 34 岁，儿子年纪 13 岁.

20. 2 幅每幅 2.10 美元的，5 幅每幅 3.30 美元的，3 幅每幅 4.62 美元的，4 幅每幅 7.70 美元的，3 幅每幅 11.55 美元的.

21. 43 只高脚杯.

22. 324 片瓷砖，每片 3 英寸见方.

23. 共 14 局，8 个游戏者.

24. 4 块饼每块 12 美分的，6 块每块 14 美分的，4 块每块 17 美分的.

25. 马尼托巴：198 人(包含 12 个领班)；安大略：214 人(包含 12 个领班)；魁北克：188 人(包含 12 个领班).

26. 保罗正读第 342 页.

27. 彼得有 3125 个“上兵”.

28. 直径分别为 17，14 和 7 基巴.

29. 杰克买 4 只鹅,8 只火鸡,8 只鸭子.

30. 查理拿走了安迪的帽子.

31. 从不定方程 $98x - 199y = 20$ 的解可知,她尚欠 26.73 美元.

32. 共卖出 1296 份“一元餐”.

33. 在整个建筑物中,共用了 41472 块的立方体石块.

34. 最实际的路线有 33 英里的路程.

35. 威尔逊得 6654 票;第二个候选人得 5513 票;马托克得 1346 票.

36. 最简单的分数是$\frac{17}{4}$.

37. 底的边长 8 英尺,斜棱长 6 英尺,垂直的高 2 英尺.

38. 5 个花坛:6，8，10；5，12，13；9，10，17；7，15，20；6，25，29(英尺).

39. 成年人每人往返车费 1.94 美元.

40. 31 位雇员分享 2869.36 美元.

第 11 章解答

2. 一个弹子的游戏

每个男孩至少有一个绿色弹子的所有不同选法如下:

红	9	8	7	6	7	6	5
蓝	2	3	4	5	3	4	4
绿	1	1	1	1	2	2	3

皮特有多于一个绿的,但却不可能有 4 个蓝的,从而他有 7 个红弹子,3 个蓝弹子,2 个绿弹子.

剩下的男孩还有 19 个红的,包含于以下选法中:

红	7 或	6 或	5 及	9	8	6
蓝	4	4	4	2	3	5
绿	1	2	3	1	1	1

只有一种安排能够产生 19 个红的：

红	5	8	6
蓝	4	3	5
绿	3	1	1

[148] 于是，共有 4 个男孩，15 个蓝色的弹子和 7 个绿色的弹子.

3. 奖金

男人：每年 3 点，共 x 年 ………………………………… $3x$ 点.

女孩：每年 2 点，共 $(23-x)$ 年……………$(46-2x)$ 点.

于是，总共点数为 $(x+46)$，它必须是 26000 的因子. 由此，$k(x+46)=26000=2^4\cdot5^3\cdot13$，这里 k 是一个整数. 由于至少有一个女孩，于是 $x\leqslant21$，因而 $k\geqslant26000/67$，即 $k>388$.

又 $(x+46)\geqslant46$，于是 $k<565$.

只有一组 26000 的因子在给定 k 值的可接受的范围内，由此得出：

$$k=400\quad500\quad520$$
$$x+46=65\quad52\quad50$$
$$x=19\quad6\quad4$$

由于服务年限为 2，3，5，6 和 7，它们不管怎么组合都不可能得出 4 或 19 的结果. 于是，我们有 $x=6$，此时 $k=500$（即 5 美元）.

由于在服务年限中要表示出 6 的唯一办法，就是单独取数 6，因此这里只有 1 个男人，他服务年限为 6 年. 其他四个都是女孩，她们的服务年限分别为 2，3，5 和 7 年.

由此奖金的分配额应该是

1 个男人……18 点，每点 5 美元……90 美元，

4 个女孩……34 点，每点 5 美元……170 美元. [149]

4. 乘车兜风

在年龄的合理范围内，2450 的因子有以下几种“可能”的编组：

2	2	5	5	5	7	7	7
25	35	7	10	14	7	10	14
49	35	70	49	35	50	35	25
76	72	82	64	54	64	52	46

教授说：“……她们的年龄仍然有疑问.”可见他本人的年龄一定是 32. 因为在上面所有的“可能”中，年龄的和只有 64 出现了两次.

如果比尔的年龄（这是教授所知道的）是 48 岁或更小一些，那么在他最后陈述之后，情况依然不清楚！但文中却指出“这使一切都清楚了！”可见比尔应该是 49 岁，而那三个“女孩”则分别是 7 岁，7 岁和 50 岁.

5. 他们会相遇吗？

若从交叉点 A 到交叉点 B，要走过 m 条朝“一个方向”的街段，走过 n 条朝“另一个方向”的街段，则不同路线的总数是：

$$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}.$$

根据题中假定，我们有 $m=4$，

由此 $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{4!}=70$，

推知 $n=4$.

于是，从伯特办公室到本恩打电话的地方，要往南走 4 个街段，往东也走 4 个街段. [150]

6. 聚会之后

本题能够巧妙地用布尔代数的方法求解（见第 5 章）. 指定代码字母如下：

人　名	他的代码	他的帽子	他的大衣
罗　恩	R	r	1
多　哥	D	d	2
史蒂夫	S	s	3
乔	J	j	4

有人拿走了乔的帽子和史蒂夫的大衣，于是：

$$Rj3 + Dj3 = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

被史蒂夫拿走的帽子是属于被乔拿走大衣那个人的，于是：

$$J1 \cdot Sr + J2 \cdot Sd + J3 \cdot Ss = 1,\ 但\ Ss = 0,$$

因此，
$$J1 \cdot Sr + J2 \cdot Sd = 1 \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

但罗恩拿走多哥的帽子，于是 $Rd = 1$，$Rj3 = 0$. 因此，方程(1)退化为 $Dj3 = 1$. 又 $Sd = 0$，于是 $J2 \cdot Sd = 0$，方程(2)退化为 $J1 \cdot Sr = 1$.

于是，关于帽子我们有：$Rd = Dj = Sr = 1$，由此 $Js = 1$. 而关于大衣我们有：$D3 = J1 = 1$，又因 $Rd = 1$，它暗指 $R2 = 0$（一个人的大衣，另一个人的帽子）. 我们必须有 $R4 = 1$，由此 $S2 = 1$.

于是，

乔拿走了史蒂夫的帽子，　罗恩的大衣；
史蒂夫拿走了罗恩的帽子，多哥的大衣；
罗恩拿走了多哥的帽子，　乔的大衣；
[151] 多哥拿走了乔的帽子，　　史蒂夫的大衣.

7. 一场温和的赌博

假设 A 是第一局的输家，它开始时有 $5x$ 美分，则 B 开始时有 $(75 - 5x)$ 美分.

如果 A 输掉了全部三局，则有 $75 - 4x = \pm 7$，由此 $x = 17$，这显然是不可能的.

如果 A 输掉了第一局和第三局，则第一局后 B 有 $(75-4x)$，它不被 4 整除，因而也不可能.

如果 A 输掉了第一、二局，则 $(2x+25)-(50+2x)=\pm 7$，由此 $x=8$.

因而，开始时 A 有 40 美分，B 有 35 美分. 由于本恩输掉了第三局，所以本恩就是 B.

从而，汉克开始时有 40 美分.

8. 一位在需要时候的朋友

假设年龄是：约翰 x 岁，泰德 y 岁，本恩 z 岁，并有 $x>y>z$，x，y，z 为整数.

$$z(x-y)=x(y-z)-1,$$

由此 $$(x+z)(2x-y)=2x^2-1.$$

于是，$(2x^2-1)$ 有两个因子 $(x+z)$ 和 $(2x-y)$. 很明显，它们之中的任一个都不等于 1，因而 $2x^2-1$ 不可能是素数.

由于 x 必须在 43 到 49 之间，因而 $x=44$ 或 47，因为对其他 43 到 49 范围内的 x 值，都使得 $2x^2-1$ 为素数.

对 $x=44$ 和 $x=47$ 分别求出 $2x^2-1$ 的因子. 很明显，这里所有的人都是成年人，因此唯一可以接受的解答如下：$x=44$，$y=39$，$z=35$. [152]

9. 他的第一份工作

假设他第一星期赚 x 美分，且已工作了 y 星期.

因此，$$xy+\frac{99}{2}y(y-1)=40700,$$

由此 $$y(2x+99y-99)=81400=2^3\cdot 5^2\cdot 11\cdot 37.$$

现 $x>4000$，于是 $$99y^2+7901y<81400,$$

得出 $$y<10.$$

又 $x<6000$，于是 $$99y^2+11901y>81400,$$

得出 $$y>5.$$

但 y 必须是 81400 的因子，于是得 $y = 8$，代入 y 值，我们得 $x = 4741$.

[153] 于是，约翰尼斯第一星期赚 47.41 美元.

10. 去别墅

令全程为 x 英里.

第 1 部分——15 英里，每小时 40 英里——$\frac{3}{8}$小时，

第 2 部分——$\frac{ax}{9}$英里，每小时 b 英里——$\frac{ax}{9b}$小时，

第 3 部分——$\frac{x}{7}$英里，每小时 c 英里——$\frac{x}{7c}$小时.

这里 $c > b > 40$，且 a，b，c 是正整数. 于是

$$\frac{x}{7} + \frac{ax}{9} + 15 = x，从而\ x = \frac{945}{54 - 7a}.$$

因为 $(54 - 7a)$ 必须是正的，于是 $a < 8$. 又 $x > 100$，于是 $a > 6$. 从而 $a = 7, x = 189$. 行驶全程所用总的时间是：

$$\frac{3bc + 1176c + 216b}{8bc} = \frac{189}{56} = \frac{27}{8}\ 小时.$$

于是 $$bc + 72b + 392c = 9bc,$$

即 $$bc - 9b - 49c = 0.$$

由此 $$(b - 49)(c - 9) = 441 = 3^2 \cdot 7^2.$$

由于不是“疯狂的速度”，所以我们可以假定 $(c - 9) < 147$. 而明显地我们又可假定 $(c - 9) > 21$，于是我们有：

	$c - 9$	$= 49$ 或	63
这时	$b - 49$	$= 9$	7
得出	c	$= 58$	72
	b	$= 58$	56

但因 $c > b$，因此 $c = 72$，$b = 56$.

[154] 从而知最后七分之一路程的平均速度为每小时 72 英里.

12. 那英国天气

令 x 天下雨，y 天干燥，且他在干燥日子里每天抽 a 根烟（a 是一个整数）.

在整段期间每天平均消耗烟为 $(20x+ay)/(x+y)=5a$，

由此　　　$5x(4-a)=4ay$，于是 $a<4$.

又　　　　$x>y$，于是 $a>2$.

因此　　　$a=3$，此时 $5x=12y$.

于是，$(x+y)$（"大约五个星期"）必须是 17 的倍数，由此，

$$x+y=34,\quad 此时\ x=24, y=10.$$

于是，有 24 个雨天.

13. 一分钱上，一分钱下

假设他买了 x 件每件 $(y+a)$ 美分的；$(x-1)$ 件每件 $(y+b)$ 美分的；$(x+1)$ 件每件 $(y+c)$ 美分的. 这里 a，b，c 是 $+1$，0，-1，但未必逐个对应.

则总成本为　$3xy+(c-b)+x(a+b+c)$ 美分.

$a+b+c=0$，于是总成本为 $3xy+(c-b)$ 美分.

$3245\equiv 2\equiv -1 \pmod 3$．因而 $c-b=2$ 或 -1.

于是，我们有	$c=$	1　或	0　或	-1
伴有	$b=$	-1	1	0
又	$a=$	0	-1	1
从而	x 件单价	y	$y-1$	$y+1$
	$x-1$ 件单价	$y-1$	$y+1$	y
	$x+1$ 件单价	$y+1$	y	$y-1$
	3245	$=3xy+2$	$3xy-1$	$3xy-1$
	xy	$=$ 1081	1082	1082

现 $1082=2\times 541$，所给出的是不可接受的整数 x 值. 而 $1081=23\times 47$，由已知，$3x$ 大约为 72（"六打"），因此 $x=23$，$y=47$.

于是，他买了 24 件每件 48 美分的；23 件每件 47 美分的；

[155] 22 件每件 46 美分的.

14. 四代人

假设赖尔太太的年龄为 $(10a+b)$ 岁，她父亲年龄为 $(10x+y)$ 岁，则她祖父的年龄为：

$$(10x+y)(a+10b)-(x+10y)(10a+b)$$
$$=99(bx-ay).$$

由此，她祖父的年龄为 99 岁，且 $bx-ay=1$.

又 $$10x+y+10a+b=99-6,$$

于是 $$10(x+a)+(y+b)=93,$$

由此 $$x+a=9 \text{ 或 } 8,$$

这时有 $$y+b=3 \text{ 或 } 13.$$

如果 $x+a=9$，则 $a=9-x, b=3-y$，

给出 $3(x-3y)=1$，这是不可能的.

于是 $x+a=8$，伴有 $a=8-x, b=13-y$.

给出 $$13x-8y=1.$$

具有一般性解： $x=8k-3, y=13k-5$.

因为 x 和 y 是小于 10 的整数，所以

$$x=5, y=8.$$

由此， $$a=3, b=3.$$

于是，所求年龄为：

赖尔太太的祖父……99 岁，

她的父亲……58 岁，

她自己……35 岁.

15. 在业余爱好商店

肯恩有 x 枚硬币，每枚 a 美分；皮特有 $3x$ 枚，每枚 b 美分. 则 $4x=y^3$，这里 y 是每堆中的硬币数目.

又　　$x(a+3b)=1350$.

由此，　　$y^3(a+3b)=5400=2^3\cdot3^3\cdot25$，且 y 是偶数.

则　$y=2$ 或 $y=6$.

若　$y=2$，则有 $a+3b=675$，但 a 和 b 是一套 1，5，10，25，50 中两个不同的数，所以 $a+3b$ 不能超过 175. 于是：

$y=6$，这时有 $a+3b=25$. 推知 $a=10$，$b=5$，且有 $x=54$.

从而肯恩有 54 枚一角银币，皮特有 162 枚 5 美分的镍币.　[156]

16. 独占鳌头

假设游泳池的尺寸为 x 英尺×y 英尺，总造价 C 美元，这里 x，y，C 是整数. 因此，

$$\text{面积}=\frac{(Cx-35x^2)}{27}\text{英尺，是一个整数.}$$

要使上式面积最大，理论上应 $x=\frac{C}{70}$，$y=\frac{C}{54}$，且 $C\leqslant 999$. 面积最大值 $=\frac{C^2}{3780}=\frac{999^2}{3780}=264$ 加上一个零头.

$$264=2^3\cdot3\cdot11,\quad 263=\text{素数},$$
$$262=2\cdot131,\quad 261=3^2\cdot29,$$
$$260=2^2\cdot5\cdot13,\quad \text{等等.}$$

为了取得极大的面积，我们必须使得 $\frac{x}{y}$ 要尽可能地接近 $\frac{27}{35}$.

在 264 的因子中，最接近上述比的是 $x=12$，$y=22$，即 $\frac{x}{y}=\frac{6}{11}$，但这时有 $C=1014>1000$，这是不可取的. 再看 261，在它的因子中最接近要求的是 $x=9$，$y=29$，它不仅比例失调，而且 $C=1098$，因而也不可取. 再来看 260，因子中最接近要求的是 $x=13$，$y=20$，比例很理想，造价为 $C=995$.

于是，游泳池的尺寸该是长 20 英尺，宽 13 英尺.

17. 钟

钟每小时慢 7 分钟，则 x 小时后共慢 $7x$ 分钟.

根据已知，钟 x 小时后指示正确，则它届时共慢：

$\{(720-3)+(12\times 60\times y)\}$ 分钟，这里 y 是整数.

由此，$$7x = 717 + 720\cdot y,$$

具有解：$$\left.\begin{aligned} x &= 720k+411 \\ y &= 7k+3 \end{aligned}\right\}$$ k 是一些整数.

在第一次造访后钟首次指示正确的时间相当于 $k=0$，此时有：$x=411$，$y=3$. 这是在那个星期天之后的 17 天又 3 个小时.

此后钟再次显示正确的间隔为 720 小时，即 30 天.

第二次钟显示正确的时间应在第一次造访之后的第 47 天，这显然不可能是在同一个月.

因此，第二次造访必须在星期天以后的第 17 天，即在星期[157]三.

18. 只有小零币

假设他们有：

基克——x 枚库克硬币，z 枚一角银币；

彼得——y 枚库克硬币，$\dfrac{2x-3y+2z}{3}$ 一角银币.

应用比率都换成美元后有：

$$68x - 27y + 95z = 4560,$$

这里 x，y，z 是整数.

通除以 27 知 $\dfrac{13x+13z-3}{27}$ 是一个整数.

由此 $\dfrac{x+z+6}{27}$ 是一个整数，令其为 k.

则 $$x = 27k - z - 6,\ y = 68k + z - 184.$$

但 z 枚一角银币值 $\frac{19z}{10}$ 库克硬币，而彼得的 y 枚库克硬币不足于兑换它，于是 $10y < 19z$.

由此 $680k + 10z - 1840 < 19z$，即 $680k < 9z + 1840$.

但基克的银币数少于 24，即 $z < 24$，由此 $680k < 2056$，得知 $k < 4$.

但由 y 的表达式知，若 $z < 24$ 则 $k > 2$. 然而 k 是一个整数，所以它必须是 3.

于是，问题的解变为 $x = 75 - z, y = 20 + z$.

但 $10y < 19z$，于是 $200 + 10z < 19z$，由此 $z > 22$.

这样一来，$z = 23, x = 52, y = 43$.

答案是基克有 52 枚库克硬币，23 枚一角银币；彼得有 43 枚库克硬币，7 枚一角银币. [158]

19. 共同的生日

假设年龄是：妻子 x 岁，儿子 y 岁，x 和 y 都是整数.

根据题意我们得出方程：

$$X^2 - 5Y^2 = 4.$$

这里，

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= X \\ y &= Y \end{aligned}\right\}$$

这一方程有两个不相同的解"族"，分别基于 $X = 1, Y = 1$，和 $X = 4, Y = 2$（见第 6 章），其整数解依次为：

	$X =1$	4	11	29	76	等等，
	$Y =1$	2	5	13	34	等等.
给出	$x =2$	5	13	34	89	等等，
	$y =1$	2	5	13	34	等等.

很明显，仅有 $x = 34, y = 13$ 是可接受的解. [159]

20. 在艺术品商店

价格是给定的，我们有：

$$210x + 330y + 462z + 770u + 1155v = 10001,$$

x, y, z, u, v 全是大于 1 的整数.

上式两端分别除以 11，7，5，3 和 2 后得知：

$\frac{x-2}{11}$, $\frac{y-5}{7}$, $\frac{2z-1}{5}$, $\frac{2u-2}{3}$, $\frac{v-1}{2}$ 必须是整数，

则 $\frac{6z-3}{5}$ 是一个整数，

于是 $\frac{z-3}{5}$ 和 $\frac{u-1}{3}$ 是整数.

由此，我们能令：

$$x = 11a + 2,\ y = 7b + 5,\ z = 5c + 3,$$
$$u = 3d + 4,\ v = 2e + 3,$$

由于已知 $x, y, z, u, v > 1$，所以这里的 a, b, c, d, e 必须是非负整数. 把上述值代入原先的方程，变为：

$$2310(a + b + c + d + e) = 0.$$

由此得： $a = b = c = d = e = 0,$

于是有 $x = 2,\ y = 5,\ z = 3,\ u = 4,\ v = 3.$

由上可知，购买的画是：

2 幅单价 2.10 美元，

5 幅单价 3.30 美元，

3 幅单价 4.62 美元，

4 幅单价 7.70 美元，

[160] 3 幅单价 11.55 美元.

22. 自己动手

假定他有 y 片瓷砖，每片均 x 英寸见方，则平台面积为 yx^2. 如用每片为 $\left(x - \frac{3}{4}\right)$ 英寸见方的瓷砖，则需用 $(y + 252)$ 片，我们有：

面积 $$\frac{(y+252)(4x-3)^2}{16}=yx^2,$$

由此 $$y=168x-189+\frac{189}{8x-3}.$$

现因 x 和 y 都是整数，于是 189 是 $(8x-3)$ 的一个倍数，$189=3^3\cdot7$，于是

$$(8x-3)=7,9,21,27,63,\text{或 }189.$$

但其中 x 应是整数，这样就只留下 $(8x-3)=21$ 或 189.

	$8x-3=$	21	189
伴有	$x=$	3	24
相应地	$y=$	324	3844

很明显，平台面不可能要求使用 3844 片 24 英寸见方的瓷砖. 于是比尔用的瓷砖共 324 片，每片 3 英寸见方.

23. 谁玩换牌游戏

假设有 x 名游戏人，他们共玩 y 局.

在最后一局之前的每一局，共有金的收入为 $5(x-6)$ 美分. 于是，在最后一局开始时桌面上的共有金有 $5(x-6)(y-1)$ 美分.

而在最后一局收入共有金 $5(x-1)$ 美分. 此时桌面上的共有金变为：

$$5\{(x-6)(y-1)+(x-1)\}=5(xy-6y+5)\text{ 美分}.$$

吉姆在前 $(y-1)$ 局中输了 $5(y-1)$ 美分. 但最后一局赢了，清扫了桌面上所有的共有金，而且净赢一美元.

于是，$5(xy-6y+5)-5(y-1)=100,$

由此 $$y(x-7)=14.$$

因为每个参加游戏的人都至少赢一次，于是 $y\geqslant x$，且 x，y 是整数. 由此 $y=14$，$x-7=1$，$x=8$.

即共有 8 个参加游戏的人，他们共玩 14 局.

24. 一则有关饼的故事

我们得到方程 $12x+14y+17z=200$，x，y，z 是整数. 该方程有一般解：

$$\left.\begin{aligned} x &= 11-4y+17k \\ y &= y \\ z &= 4+2y-12k \end{aligned}\right\} k \text{ 是整数.}$$

由 x，我们有 $4y<17k+11$. 由 z，$4y>24k-8$. 由此 $k<3$. 又明显地 $k\geqslant 0$.

下表列出了 5 组可接受的解.

x	=	7	3	8	4	1
y	=	1	2	5	6	11
z	=	6	8	2	4	2
总数	=	14	13	15	14	14

加利的母亲知道这个总数，但她仍然感到疑虑，说明这个总数是 14.

如果对母亲的提问加利的回答是"是"，那么他所买的饼的个数要么是 7，1，6，要么是 1，11，2，其细节仍然不能确定.

所以加利所说的必然是"不"，而实际上也正是说"不"，从这些他母亲知道了他买的是：

[162] 4 个 12 美分的；6 个 14 美分的；4 个 17 美分的.

25. 必由之路

假设从各省来的包括领班在内的总人数是：

$$\left.\begin{array}{ll} \text{马尼多巴} & 17x+a \\ \text{魁北克} & 17y+b \\ \text{安大略} & 17z+c \end{array}\right\} a,\ b,\ c \text{ 是整数，且全小于 17.}$$

由此 $$17(x+y+z)+a+b+c=600.$$

"剩下来"的 $(a+b+c)$ 分为两组：

(1) a 个马尼多巴人；

(2) c 个安大略人和 1 个魁北克人.

这两组人数相等，且 $b=1$，则 $c=a-1$，因为 $a+b+c=2a$，所以

$$17(x+y+z)+2a=600,$$

带有一般性的解：$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2k \\ a&=300-17k \end{aligned}\right\}$

但 a 大于零，且 $a<17$，于是 $k=17$，$a=11$.

则 $$x+y+z=34.$$

现考虑领班的. 这里有 $(x+1)$ 人来自马尼多巴，$(y+1)$ 人来自魁北克，z 人来自安大略，他们全部相等，即

$$x+1=y+1=z.$$

由此，$3x+1=34$，于是 $x=11$，这时有 $y=11$，$z=12$. 这就提供了所要求的解：

马尼多巴　198 人（含 12 个领班）；

魁北克　188 人（含 12 个领班）；

安大略　214 人（含 12 个领班）.

[163]

26. 一次阅读的间歇

令他正在读的页数为 n.

在他正在读的这页之前有 $(n-13)$ 页，具有和：

$$\frac{(n-13)(n+12)}{2}.$$

如果最后一页的页数为 m，则在这页之后有 $(m-n)$ 页，具有和：

$$\frac{(m-n)(m+n+1)}{2}.$$

以上两式相等，$(n-13)(n+12)=(m-n)(m+n+1)$，

由此 $$(2m+1)^2-2(2n)^2=-623.$$

现 $623=7\cdot 89$，两个因子都是素数. 因而上述佩尔方程有两个不同的解族（见第 6 章）. 我们可以发现，这些解族分别基于：

$$\left.\begin{array}{r}2m+1=5\\2n=18\end{array}\right\}\quad 和\quad \left.\begin{array}{r}2m+1=23\\2n=24\end{array}\right\}$$

它给出一般性的整数解：

$$\left.\begin{array}{r}2m+1=\pm(5a\pm 36b)\\2n=\pm(18a\pm 5b)\end{array}\right\}\quad 和\quad \left.\begin{array}{r}2m+1=\pm(23a\pm 48b)\\2n=\pm(24a\pm 23b)\end{array}\right\}$$

这里 $$a^2-2b^2=1.$$

把解的依次的值列成表，我们得到：

$m=$	13	28	43	82	92	173	258	483	541	等，
$n=$	13	22	32	59	66	123	183	342	383	等，
$m-n=$	0	6	11	23	26	50	75	141	158	等.

由于保罗还有“将近 150 页”要读，于是 $m-n=141$，$m=$ [164] 483，$n=342$. 这就给出了所要求的解答.

27. 他的私人军队

假设在两个方阵中较小的一个里有 x^2 个士兵，而彼得计划的那五个方阵的每一个有 y^2 个，x 和 y 是整数.

则 $$x^2+(x+3)^2=5y^2,$$

由此， $$(2x+3)^2-10y^2=-9.$$

该佩尔方程（见第 6 章）有两个不同的解族，它们分别基于：

$$\left.\begin{array}{r}2x+3=1\\y=1\end{array}\right\}\quad 和\quad \left.\begin{array}{r}2x+3=9\\y=3\end{array}\right\}$$

把解的值依次列成表，我们有：

$x=$	3	19	38	174	等，
$y=$	3	13	25	111	等.

诚然，这 $5y^2$ 个士兵的总和要考虑多于 1000. 又士兵阵列只是摆在一张大桌面上，所以 $y = 111$ 是不可能接受的解.

由此，$x = 38$，$y = 25$，且有 3125 个士兵.

28. 卡尔神庙的大球

令直径是： $x \geqslant y \geqslant (38 - x - y)$，$x$，$y$ 是整数.

则 $$x^3 + y^3 + (38 - x - y)^3 = 8000.$$

由此，$(x + y)\{xy + 1444 - 38(x + y)\} = 15624$，

$15624 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$，且 $(x + y)$ 是 15624 的一个因子.

因为 $x \geqslant y \geqslant (38 - x - y)$，$(x + y) \geqslant 26$，

又 $x + y < 38$，于是 $x + y = 28$ 或 31 或 36.

由 $x + y = 36$，我们有 $xy = 358$，无解.

由 $x + y = 28$，我们有 $xy = 178$，无解.

由 $x + y = 31$，我们有 $xy = 238$，由此 $(x, y) = (17, 14)$.

于是，所求的三球直径为 17，14 和 7 基巴. [165]

29. 高峰期过后

一只鹅与一只鸭的价格总和必须是一个整的美元数，虽然它们各自的价格范围还不能定. 因此，我们可令：

$2x$ 只 火鸡，每只 700 美分；
y 只 鸭，每只 8 美分；
x 只 鹅，每只 $(100y - z)$ 美分.

这里 $3x + y = 20$，且 x，y，z 是整数，

由此，$$75x^2 - (850 - z)x - 5z + 2500 = 0,$$

于是 $$150x = 850 - z \pm \sqrt{(z^2 - 200z - 27500)}.$$

现 x 和 z 为整数，于是可令 $z^2 - 200z - 27500 = k^2$，k 是一个整数. 则

$$(z - 100)^2 - k^2 = 37500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^5.$$

又 $y \leqslant 17$，于是 $z < 1700$，且 $z - 100 < 1600$.

注意这最后的情况，现列表如下：

$z - 100 + k =$	3750	1250	750	250	
$z - 100 - k =$	10	30	50	150	
$z - 100 =$	1880	640	400	200	
$z =$	—	740	500	300	
$k =$	—	610	350	50	
$150x =$	—	720	700	500 或	600
$x =$	—	—	—	—	4
这时有 $y =$	—	—	—	—	8

于是，杰克买了 4 只鹅，每只 5 美元；8 只火鸡，每只 7 美元；8 只鸭，每只 3 美元.

[166]

30. 谁的帽子？

这道题可以用图解的方法来解，但巧妙的布尔代数方法将更为有趣.

我们用代码表示四个成员拿走或丢失帽子，如下：

	拿走	丢失
安　迪	A	a
比　尔	B	b
查　理	C	c
唐　恩	D	d

显然，$Aa = 0$，$Bb = 0$，$Cc = 0$，$Dd = 0$，又安迪和比尔没有拿错对方的帽子，$Ab = 0$，$Ba = 0$.

从题中给出的资料，我们有三个方程：

$$Ac \cdot Bd + Ad \cdot Bc = 1 \quad \cdots\cdots (1)$$

$$Ca + Cb + Cd = 1 \quad \cdots\cdots (2)$$

$$Da + Db + Dc = 1 \quad \cdots\cdots (3)$$

(2) × (3) 并消去零的项，即消去 $Da \cdot Ca$，$Db \cdot Cb$ 及 $Dc \cdot Cd$，留下的有

$$Da \cdot Cb + Da \cdot Cd + Db \cdot Ca + Db \cdot Cd + Dc \cdot Ca + Dc \cdot Cb = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

(4) × (1) 并消去任何包含 a，b，c，d 多于一次的项，又消去任何包含形如 $CxXc$ 的成分（被查理拿走帽子的那个人没有拿走查理的帽子）. 我们留下的有：

$$Da \cdot Cb \cdot Ac \cdot Bd + Dd \cdot Ca \cdot Ad \cdot Bc = 1.$$

于是，上述项中必有一项是真实的. 我们重组每个项，给出：

$$Da \cdot Ac \cdot Cb \cdot Bd + Db \cdot Bc \cdot Ca \cdot Ad = 1.$$

现在，由于唐恩拿走了某人的帽子，而这个人又拿走了那个拿了安迪帽子的人的帽子. $Da \cdot Cb \cdot Ac \cdot Bd$ 无法满足这一点，因此该项必须为零值.

由此，我们仅留下 $Db \cdot Bc \cdot Ca \cdot Ad = 1$.

这意味着：唐恩拿走了比尔的帽子，比尔拿走了查理的帽子，查理拿走了安迪的帽子，而安迪则拿走了唐恩的帽子. 唐恩是那天晚上最早离开俱乐部的人. [167]

32. 一元餐

假设这“一元餐”卖了 x 个星期，且该餐厅有 y 个女孩.

则
$$\sum_{x=1}^{x}(x^3) = \frac{x^2(x+1)^2}{4} = y^4.$$

于是
$$x(x+1) = 2y^2,$$

由此
$$(2x+1)^2 - 2(2y)^2 = 1.$$

这是最简单的佩尔方程（见第 6 章），具有解：

$2x + 1 = 3 \quad 17 \quad 99$ 等，

$2y = 2 \quad 12 \quad 70$ 等.

给出　　$x = 1 \quad 8 \quad 49$　等，

　　　　$y = 1 \quad 6 \quad 35$　等.

但 $x < 26$，于是所求解为 $x = 8$，$y = 6$，从而这些"一元餐"卖出的总份数为 1296.

33. 建筑物依然耸立

假设在大立方体部分有 x^3 块正方体石头，在基台部分有 $(y^2 - x^2)$ 块正方体石头，这里 x，y 是整数.

则　$y^2 - x^2 = 2x^3$，由此　$x^2(2x + 1) = y^2$.

于是，可令 $2x + 1 = z^2$，得　$2x = z^2 - 1$.

这里 z 必须是奇数，因此又可设为 $z = 2k - 1$，由此

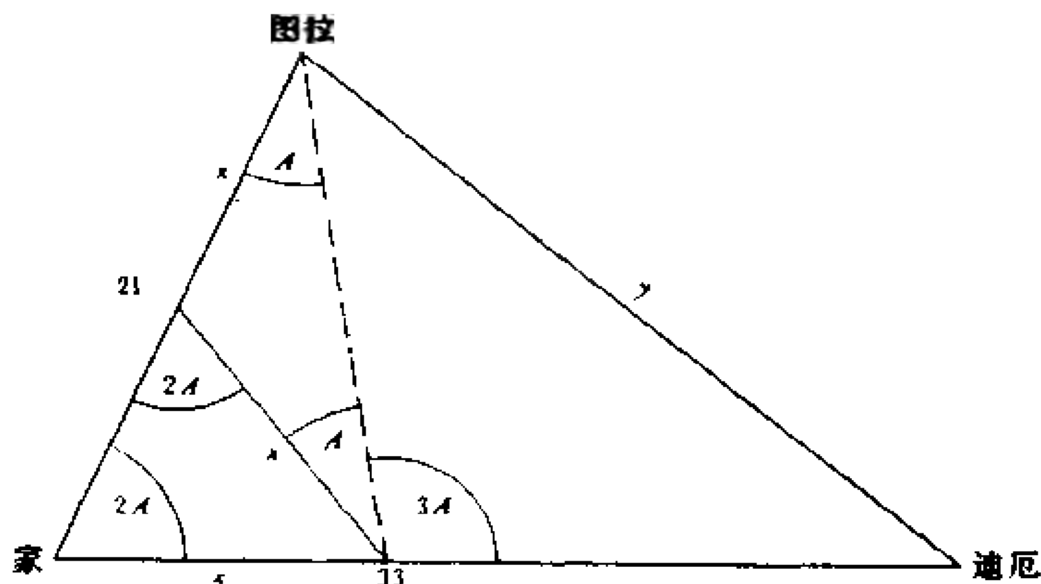
$$x = 2k(k - 1), y = 2k(k - 1)(2k - 1).$$

由肯恩有关高度的议论中知，应有 $k = 4$，这时有 $x = 24$，且 $x^3 = 13824$.

于是，在整个建筑物中共有 41472 块正方体石头.

34. 最实际的路线

$$\frac{x}{\sin A} = \frac{21}{\sin(180° - 3A)} = \frac{21}{\sin 3A}.$$



但，$\sin 3A = \sin A(2\cos 2A + 1)$，于是 $2\cos 2A = \frac{21-x}{x}$.

$$y^2 = 21^2 + 33^2 - 2\cdot 21\cdot 33\cos 2A$$
$$= 2223 - (3^3\cdot 7^2\cdot 11)/x.$$

x 和 y 两者均为整数，于是 x 是 $3^3\cdot 7^2\cdot 11$ 的因子.

又 $x > \frac{21}{3}$，即 $x > 7$，且明显地 $x < 21$. 由此，$x = 9$ 或 11.

只有当 $x = 11$ 时，才可能得到整数值 y. 于是：

$$x = 11，这时有\ y = 30.$$

从而这最实际的路线有 33 英里. [169]

35. 选　举

假设选举得票数如下：

威尔逊 a；第二位候选人 b；马托克 c.

则我们有 $a > b > c$，又 $(b + c) > a$，及 $(a + b) > 9c$. 令　$a + b = x^3, a + c = y^3, b + c = z^3$，这里 x, y, z 是整数，且 $x > y > z$. 则

$$2a = x^3 + y^3 - z^3, 2b = x^3 - y^3 + z^3, 2c = y^3 + z^3 - x^3.$$

注意到这里 x, y, z 三者要么全是偶的，要么只有一个是偶的.

由 $(a + b) > 9c, 2x^3 > 9y^3 + 9z^3 - 9x^3$，于是

$$11x^3 > 9y^3 + 9z^3 \quad \cdots\cdots (1)$$

由 $(b + c) > a, 2z^3 > x^3 + y^3 - z^3$，于是

$$11x^3 < 33z^3 - 11y^3 \quad \cdots\cdots (2)$$

(1)，(2)联立，

$$33z^3 - 11y^3 > 9y^3 + 9z^3，于是\quad 6z^3 > 5y^3.$$

类似地，

$11x^3 - 9y^3 > 9z^3$，而 $9z^3 > 3x^3 + 3y^3$，于是 $2x^3 > 3y^3$.

又 z 至少比 y 小 1，$6z^3 > 5(z+1)^3$，于是

$$z > 15，且\ y > 16.$$

现对 y 的值，及位于范围 $6y^3 > 6z^3 > 5y^3$ 及 $6z^3 - 2y^3 > 2x^3 > 3y^3$ 内的相应的 z 和 x 的值列表.

对于 $y = 17$，18 和 19，可求得相应的 $z = 16$，17 和 18，但此时没有相应的整数 x 值位于规定的范围. 对于 $y = 20$，我们有 $6y^3 = 48000$，而 $5y^3 = 40000$，于是 $z = 19$，$6z^3 = 41154$；又 $6z^3 - 2y^3 = 25154$，且 $3y^3 = 24000$，于是 $2x^3 = 24334$，$x = 23$.

由此得出 $x = 23$，$y = 20$，$z = 19$，其中只有一个是偶数，并满足有关的条件. 因此所求解为：

$$a = 6654,$$
$$b = 5513,$$
[170]
$$c = 1346.$$

36. 什么是数？

我们有 $x^2 + 15 = y^2$，且 $x^2 - 15 = z^2$，x，y，z 是有理分数，具有整数的分子和分母.

则 $30 = y^2 - z^2 = (y+z)(y-z)$，于是 y 和 z 两者同偶或两者同奇①.

因此 $(y-z)$ 必须为偶. 令 $y - z = 2k$

由此 $y + z = \dfrac{15}{k}$

则 $$y = \frac{15}{2k} + k，z = \frac{15}{2k} - k.$$

代入 $2x^2 = y^2 + z^2$，我们得：

① 译者注：既然 y 和 z 是有理分数，那么关于"y 和 z 两者同奇或者同偶"的结论便是不对的. 好在作者在以下的解法中实际上没有用到这个结论！

$$x^2=\left(\frac{15}{2k}\right)^2+k^2.$$

这实际上是大家所熟悉的毕达哥拉斯方程(见第6章),具有解:

$$x=(a^2+b^2)t,\ \frac{15}{2k}=(a^2-b^2)t,\ k=2abt.$$

则 $t=\dfrac{k}{2ab}$,以此代入,我们有:

$$x=\frac{(a^2+b^2)k}{2ab},\quad y=\frac{(a^2+2ab-b^2)k}{2ab},$$

$$z=\frac{(a^2-2ab-b^2)k}{2ab},$$

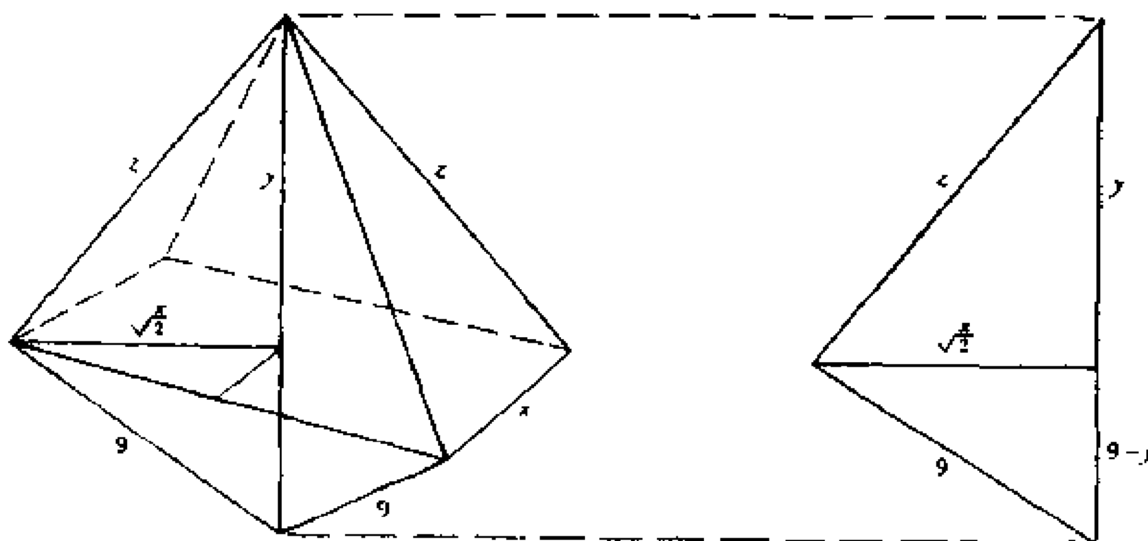
这里
$$\frac{(a^2-b^2)k^2}{ab}=15.$$

通过快速的试验,可以看出后一个方程最简单的解答为 $a=4,b=1,k=2$,由此

$$x=\frac{17}{4},\ y=\frac{23}{4},\ z=\frac{7}{4}.$$

于是,所求的分数为$\dfrac{17}{4}$. [171]

37. 墓葬地



如图所标，$9^2-(9-y)^2=z^2-y^2=\frac{x^2}{2}$，$x$，$y$，$z$ 是整数.

则 $z^2=18y$，由此 $y=2k^2$，$z=6k$，k 是一个整数.

将 y、z 代入得 $x^2=8k^2(9-k^2)$，

于是 $18-2k^2=t^2$，t 是一个整数，

由此 $t^2+2k^2=18$，

它只有一组整数解：$t=4$，$k=1$，由此导出 $x=8$，$y=2$，$z=6$.

因而墓石的尺寸是：底边长 8 英尺，斜棱长 6 英尺，垂直的高 2 英尺.

〔172〕

38. 草地变绿的地方

假设花坛的边长为(英尺)：

$(x+y)$，$(y+z)$，$(x+z)$，x，y，z 是整数.

对于边为 A，B，C 的三角形，其面积为：

$\sqrt{s(s-A)(s-B)(s-C)}$，这里 $2s=A+B+C$.

于是，对于花坛我们有：$s=x+y+z$.

面积$=\sqrt{xyz(x+y+z)}$，周长 $=2(x+y+z)$.

由此 $xyz=4(x+y+z)$，又我们不妨令 $x\geqslant y\geqslant z$.

则，$\frac{xyz}{x+y+z}=4$，且能使 $\frac{xyz}{x+y+z}$ 取得极小值的 z，也必须是极小的.

如果 $z=1$，则 $4(x+y+1)=xy$，于是 $(x-4)(y-4)=20$.

给出 $x=24\quad 14\quad 9$，

$y=5\quad 6\quad 8$.

而相应的 3 个三角形具有边：

$$29,\quad 25,\quad 6;$$
$$20,\quad 15,\quad 7;$$
$$17,\quad 10,\quad 9.$$

如果 $z=2$，则 $4(x+y+2)=2xy$，
引出两个三角形具有边：

$$13,\quad 12,\quad 5;$$
$$10,\quad 8,\quad 6.$$

如果 $z=3$，则 $4(x+y+3)=3xy$，
引出一个三角形：13，12，5（已有）.

现 $\frac{4\times 4\times 4}{4+4+4}>4$，于是，如果 $z>3$，则

$$\frac{xyz}{x+y+z}>4.$$

于是，我们找到全部五种整数解，值如下：

6，8，10；5，12，13；9，10，17；7，15，20；6，25，29.

[173]

39. 短途旅行

如果一个小孩单程车费是 y 美分，那么全部的车费结构必须是以下中的一种：

	成人	小孩	成人	小孩	成人	小孩	成人	小孩
往返	$4y$	$2y$	$4y$ 1	$2y$	$4y-2$	$2y-1$	$4y-3$	$2y-1$
单程	$2y$	y	$2y$	y	$2y-1$	y	$2y-1$	y

假设有 $2x$ 个男人，$2x$ 个小孩，1 个女人，而且我们自然可以假定 $x<25$. 接下来我们考虑每种结构应用的可能性.

（1）$y(9x+4)=5001$. 但 $9x+4$ 不可能是 3 的倍数，于是可令 $y=3k$. 则 $k(9x+4)=1667$，1667 是一个素数. 于是这里没有可接受的解.

（2）$x(9y-1)+4y-1=5001$，由此

$$(9x+4)(9y-1)=45014.$$

现 $45014=2\cdot 22507$. 要找 22507 的所有的因子比较难. 但如 $9x+4$ 是 22507 的一个因子的话，则 x 必须是奇数，于是我们可以就 x 的奇数值列表：

$x=$	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23
$9x+4=$	13,	31,	49,	67,	~~85~~,	103,	~~121~~,	139,	157,	~~175~~,	193,	211

在实际去除之前，可像上表那样划掉一些明显不可能是 22507 因子的值. 检验留下的值，发现这里没有可接受的解.

(3) $x(9y-4)+4y-2=5001$，由此

$$(9x+4)(9y-4)=45011.$$

类似于上一种情况进行，我们发现 139 是 45011 的一个因子，由此 $x=11, y=49$.

(4) $x(9y-5)+4y-3=5001$，因此

$$(9x+4)(9y-5)=45016.$$

现 45016 能容易地分解为 $8\cdot 17\cdot 331$，引出的都不是可接受的解.

于是，所求的解位于情形(3)，详细为：

11 个男人，每人往返 1.94 美元 ………… 计 21.34 美元；
11 个男人，每人单程 0.97 美元 ………… 计 10.67 美元；
11 个小孩，每人往返 0.97 美元 ………… 计 10.67 美元；
11 个小孩，每人单程 0.49 美元…………… 计 5.39 美元；
[174] 1 个妇女，往返车费 1.94 美元…………… 计 1.94 美元.

40. 分配利润

假设有 n 个合股人，共赢利 x 美分. 则：

约翰分配后留下 ………………………… $\dfrac{(n-1)x}{n}+1000$,

布鲁斯分配后留下 …… $\frac{x(n-1)^2+1000n(n-1)}{n^2}+1000$，

第 n 个人分配后留下的余额为：

$$\frac{x(n-1)^n}{n^n}+1000\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}+\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2}+\cdots+1\right].$$

令第 n 人分配后的余额是 R，又令 $\frac{n-1}{n}=m$，

则 $\quad R = xm^n + 1000(m^{n-1} + m^{n-2} + \cdots + m + 1)$

$$= xm^n + \frac{1000(1-m^n)}{1-m}.$$

于是 $\quad R = \frac{(x-1000n)(n-1)^n}{n^n} + 1000n$，

由此 $\quad (x-1000n) = \frac{(R-1000n)n^n}{(n-1)^n}$ 是一个整数.

现 $n > 2$，于是 $\frac{n}{n-1}$ 不可能是一个整数，因为在 n 和 $n-1$ 中没有大于 1 的公因子. 因此 $(R-1000n)$ 必须是 $(n-1)^n$ 的倍数.

令 $\quad R = k(n-1)^n + 1000n$，$k$ 是某个整数，

则 $$x = kn^n + 1000n.$$

分配给合股人的总数为 $(x-R)$ 美分，即 543607 美分，于是 $k[n^n-(n-1)^n] = 543607$，k 是一个整数，于是 $n^n-(n-1)^n \leqslant 543607$，且 $n^n-(n-1)^n$ 必须是 543607 的一个因子.

快速试验 $n = 3, 4, 5, 6$ 的情形，得知不能提供这样的因子. 但 $7^7 - 6^7 = 543607$，于是我们有：

$$n = 7,\ k = 1.$$

由此，$x = 823543 + 7000 = 830543$.

因此有 7 个合股人，纯利润为 8305.43 美元.

$$R = 6^7 + 7000 = 286936 = 2^3 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 89,$$

又每个雇员所得“大约 100 美元”，于是他们平均分配的额必然为 $2^3 \cdot 13 \cdot 89 = 9256$ 美分，即 92.56 美元，并且那里有 31 名雇员.

[175]

附录:斐波那契数列的一个基本性质

定理:假设斐波那契数列的项依次为 f_1, f_2, f_3, …,则其第 $n-1$ 项与第 $n+1$ 项的乘积,等于第 n 项的平方加上或减去 k,这里 k 是只依赖于 f_1 及 f_2 的常数.

证明:假设不然,k 不是一个常数.

则, $f_{n-1}\cdot f_{n+1}=f_n^2+a$, a 是某个数.

根据定义 $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$, $(n>1)$

于是 $f_{n-1}(f_n+f_{n-1})=f_n^2+a$,

即 $f_n^2-f_{n-1}^2=f_n\cdot f_{n-1}-a$;

且类似地 $f_{n-1}^2-f_{n-2}^2=f_{n-1}\cdot f_{n-2}-b$.

以上两式相加得:

$$f_n^2-f_{n-2}^2=f_{n-1}(f_n+f_{n-2})-(a+b).$$

两边同除以 (f_n+f_{n-2}),我们得出

$$f_n-f_{n-2}=f_{n-1}-\frac{a+b}{f_n+f_{n-2}}.$$

但由定义 $f_n-f_{n-2}=f_{n-1}$,由此 $a+b=0$,于是 $a=-b$.

上式不依赖于 n(对 $n>1$),所以必须对所有的 n 都成立,因此 a 的绝对值是一个常数.

现在我们有

$$f_{n-1}\cdot f_{n+1}-f_n^2=\pm k, \text{(一个常数)}$$

则 $$f_3 \cdot f_1 - f_2^2 = (f_2 + f_1)f_1 - f_2^2,$$

于是 $$k = \pm (f_2^2 - f_1^2 - f_1 \cdot f_2),$$

它仅仅依赖于 f_1 和 f_2 的值,由此定理完全获证.

注:在平常的斐波那契数列中,$f_1 = f_2 = 1$,由此,$k =$ [176] ± 1.

索　引

（译名后数码为原书页码）